מתמטיקה א' – בנקאות ושוק ההון

בחינת סוף סמסטר ב', מועד א'
המרצה: דולה
משך הבחינה שעתיים וחצי. אפשר להשתמש רק במחשבון כיס. אין לפרק את השאלון.
בתום הבחינה עליך להחזיר את כל השאלון. המחברת משמשת כטיוטה בלבד ולא תאסף.

בחלק א יש לענות על שמונה מתוך 9 שאלות. בחלק ב יש לענות על כל השאלות.
בשאלון שבו נענו יותר שאלות מהדרוש, תיבדקנה רק הראשונות, והשאלות המיותרות לא תיבדקנה. בחלק א' כל שאלה שווה 11 נקודות ובחלק ב' 3 נקודות.

<u>חלק א'.</u>
הוראות: בשאלות אלו עליך לרשום את התשובה הסופית בתוך התיבה המתאימה, ובחלק מהן יש אפשרות לתשובה חלקית. בין 10 שאלות יש לבחור 8 בלבד. משקל של כל שאלה 10 נקודות.

1. הפתרון הכללי של מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \\ 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 6 \\ 7x_1 - 14x_2 + 5x_3 + 16x_4 = 13 \end{cases}$$

שווה ל:

שאלה עבור ניקוד חלקי:
כתוב את המטריצה בשלב שבו איפסת שלוש מקומות מתחת ל-1 של עמודת ה-x_1 .
תשובה:

2. הדטרמיננטה של המטריצה $\begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ שווה ל:

א. 81 **.**
ב. 27 **.**
ג. 9 **.**

ד. 3 **.**
ה. 0 **.**

3. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+3y+az=7 \\ 4x+9y+a^2z=17 \end{cases}$$

כאשר a הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של a יש למערכת פתרון יחיד ?

תשובה:	

ב. עבור איזה ערכים של a למערכת אין שום פתרון ?

תשובה:	

ג. עבור איזה ערכים של a למערכת יש אינסוף פתרונות ?

תשובה:	

עבור נקוד חלקי:
אם עבדת בשיטת גאוס, כתוב את המטריצה לאחר אפוס העמודה הראשונה. אם עבדת לפי דטרמיננטה, כתוב את הדטרמיננטה של המערכת.

4. מצא את המטריצה A^* אם ידוע ש- $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

5. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+x^2$$

6. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה

$$f(x,y)=-x^3-y^2-3x^2+6xy+8y-9x$$

7 . ישנו משק בעל שלש תעשיות תעשיה א, תעשיה ב ותעשיה ג. ידוע כי יצור מוצרים בשווי של שקל עבור תעשיה א, מחיב רכישת מוצרים של תעשיה א בערך של 10 אגורות, של תעשיה ב בערך של 10 אגורות ושל תעשיה ג בערך של 20 אגורות. ידוע כי יצור מוצרים בשווי של שקל של תעשיה ב, מחיב רכישת מוצרים של תעשיה א בערך של 10 אגורות, של תעשיה ב בערך של 10 אגורות ושל תעשיה ג בערך של 20 אגורות, וכי יצור מוצרים של תעשיה ג בשווי של שקל, מחיב רכישת מוצרים של תעשיה א בערך של 10 אגורות, של תעשיה ב של 10 אגורות ושל תעשיה ג של 20 אגורות.
יש השוק החפשי, והוא בעל דרישה של מוצרים בשנה, במליוני שח:
40 מיליונים של תעשיה א, 140 מליונים תעשיה ב, 180 מליונים –ג. יש למצא את כמות היצור השנתית של כל תעשיה במליוני שקלים:

א. נסח את המערכת.
ב. פתור את המערכת

א:

הפתרון:

8 . חקלאי מגדל חיטים ושעורים. גדול כל טון חטה דורש דונם אדמה ו-8 מ"ק מים. גדול כל טון שעורה דורש 4 דונם אדמה ו-מ"ק מים. לחקלאי 40 דונם אדמה ו-72 מ"ק מים. עבור כל טון חטה החקלאי מקבל 1000 ₪, ועבור טונה שעורה הוא מקבל 2000 ₪. כמה טונות חטה ושעורה יגדל כדי לקבל רוח מקסימלי? מהו הרוח המקסימלי?

יש לפתור בשיטת הסימפלקס. נא לרשום את המטריצה הסופית המתקבלת!

x: y: מקסימום של הפונקציה:	המטריצה הסופית:

עבור נקוד חלקי: רשום את המטריצה הראשונה שקבלת

המטריצה:

9 בשוק יש שתי חברות טלפון אלחוטי: פלאפון וסלקום. ידוע כי השוק כלו מכוסה על ידי שתי חברות אלו. בשנה מסוימת, 80% מלקוחות פלאפון נשארו לקוחות, ו-20% עברו לחברת סלקום. באותה שנה, 90% מלקוחות סלקום נשארו בחברה, ו-10% עברו לפלאפון.

1-בטא את מספר הלקוחות בסוף השנה כפונקציה של המספר בתחילת אותה שנה.

2-הנח כי המגמה נמשכת שנים עם אותם מספרים. בטא את המספרים אחרי שנתים, שלש, וח- שנים.

3-נניח כי לפני תחילת התהליך היו מליון לקוחות לכל חברה. כמה לקוחות יהיו אחרי שנה, אחרי שנתיים?
4 -נניח כי בנתונים אחרים אחרי השנה השניה יש לפלאפון 1.17 מליון לקוחות ולסלקום יש 2.83 מליון לקוחות. מה היה מספר הלקוחות בתחילת התהליך?

<u>חלק ב'.</u>

על כל אחת מהשאלות הבאות יש לענות רק **"כן"** או **"לא"**. משקל של כל אחת מהשאלות **שווה ל 3 נקודות.** ענה על שבע שאלות בלבד.

----

10. אם במערכת משוואת מספר הנעלמים שווה למספר המשוואות אז למערכת יש פתרון יחיד.

כן	**לא**

11. אם A,B מטריצות ריבועיות והפיכות, אז גם $A+B$ מטריצה הפיכה.

כן	**לא**

12. אם A מטריצה ריבועית מסדר n, שונה מאפס, המקיימת $A^2=2A$ אז בהכרח $A=2I_n$.

כן	**לא**

13. אם למערכת משוואות ריבועית $AX=b$ אין פתרון, אז הדטרמיננטה של A שווה לאפס.

כן	**לא**

בהצלחה !

תשובה מס 1

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 5 \\ 3 & -6 & 2 & 7 & 6 \\ 7 & -14 & 5 & 16 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_4-7S_1\to S_4]{S_2-2S_1\to S_2, S_3-3S_1\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_4-2S_2\to S_4]{S_1+S_2\to S_1, S_3-S_2\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נסמן $x_1 = x, x_2 = y = s, x_3 = z, x_4 = w = t$ ונקבל פתרון:

$$x - 2y + 3w = 4, -z + w = 3, \to x = 2y - 3w + 4, z = w - 3,$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y - 3w + 4 \\ y \\ w - 3 \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. נחשב את הדטרמיננט על ידי פעולות אלמנטריות אשר שומרות על ערך הדטרמיננט:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3+S_2 \to S_3]{S_1+S_2 \to S_1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 6 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 11 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_4+2S_1 \to S_4]{-4S_1+S_2 \to S_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -4 & -20 \\ 0 & -2 & 1 & 11 \\ 0 & -2 & 1 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_4-S_3 \to S_4} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -4 & -20 \\ 0 & -2 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3-2S_2 \to S_3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -4 & -20 \\ 0 & 0 & 9 & 51 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

וכיון שכל הפעולות שומרות על הדטרמיננט הרי שערך הדטרמיננט של המטריצה המקורית שוה לערך הדטרמיננט של המטריצה האחרונה שהוא 27.

.3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & a & 7 \\ 4 & 9 & a^2 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-4S_1 \to S_3]{S_2-2S_1 \to S_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a-2 & 1 \\ 0 & 5 & a^2-4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3-5S_2 \to S_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a-2 & 1 \\ 0 & 0 & f(a) & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(a) = a^2 - 4 - 5(a-2) = (a-2)(a+2) - 5(a-2) = [a+2-5](a-2) = (a-3)(a-2)$$

לכן כאשר f(a) מתאפס (כלומר a=2,3) יש למערכת אינסוף פתרונות ולכל a אחר נציב במערכת המקורית ונראה כי יש למערכת פתרון יחיד.

4

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \to A^* = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

תשובה 5:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x,\frac{\partial f}{\partial y}=2y,\frac{\partial f}{\partial z}=2z\to x=y=z=0.$$

נסדר את מטריצת ההסיאן:

$$\begin{pmatrix} & x & y & z \\ x & 2 & 0 & 0 \\ y & 0 & 2 & 0 \\ z & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

הדטרמיננטים הם בהתאמה: 2, 4, 8 והסימנים הם +,+,+ ולכן זוהי נקודת מינימום.

תשובה 6:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-3x^2-6x+6y-9,\frac{\partial f}{\partial y}=-2y+6x+8\to$$
$$y=3x+4\to -3x^2-6x+6(3x+4)-9=0.\to$$
$$-3(x^2-4x-5)=0\to(-1,1),(5,19)$$

נסדר את מטריצת ההסיאן:

$$\begin{pmatrix} & x & y \\ x & -6x-6 & 6 \\ y & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

ולכן $\Delta = 12x + 12 - 36 = 12x - 24 = 12(x-2)$ בנקודה (-1,1) הבטוי שלילי ולכן זו נקודת אוכף. בנקודה (5,19), הבטוי חיובי ולכן יש קיצון.

מכיון ש $f''_{x,x} = -6(x+1) = -36$ זוהי נקודת מקסימום.

תשובה לשאלה 7

תשובה: מטריצת לאונטיף (במליוני שקלים) היא:

$$\begin{pmatrix} 0.9 & -0.1 & -0.1 & 40 \\ -0.1 & 0.9 & -0.1 & 140 \\ -0.2 & -0.2 & 0.8 & 180 \end{pmatrix}$$

. נחליף שורות 1ו-2 נאפס כלפי מטה ונקבל מטריצה משולשית:

$$\begin{pmatrix} 1 & -9 & 1 & -14 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

, נמשיך לאפס ונקבל x=100,y=200,z=300 במליוני שקלים.

תשובה לשאלה 8

המשך תשובה א-גרפית.

נהפך כל אי שויון לשויון, ונביט על נקודות החתוך של כל ישר עם כל ציר, ועל נקודות החתוך של שני הישרים: נקבל את (9,0),(0,10),(40,0),(0,72),(8,8). נציר את התחום הנקבע ובכך נקבל רק שלשה קדקדים: (9,0),(0,10),(8,8). על כל קדקד נציב את פונקצית המטרה x+2y ונקבל כי מקסימום הרוח הוא כאשר x=8,y=8 ואז x+2y=24 מיצג רוח מקסימלי באלפי שקלים.

המשך תשובה ב-מטריציאלית

נגדיר את המשתנה z המיצג את עודף האדמה שלא נוצלה, w המיצג את עודף המים שלא נוצלו, ונעבר לשויונים: x+4y+z=40,8x+y+w=72 .

כעת נבטא כל מצב על ידי מטריצה:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & w & b \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 40 \\ 8 & 1 & 0 & 1 & 72 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נשים לב כי מטריצת I בשתי השורות העליונות היא על z,w .

כעת נבחר את הבטוי הכי שלילי בשורה התחתונה. זהו 2- . נביט על המנות 72/1=72 ו-40/4=10 . הבטוי החיובי הקטן ביותר הוא 10. לכן ה-4 בעמודה של y הוא הפיבוט הבא, ונקבל:

$$
\begin{pmatrix}
x & y & z & w & b \\
0.25 & 1 & 0.25 & 0 & 10 \\
8 & 1 & 0 & 1 & 72 \\
-1 & -2 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

כעת נשתמש בפיבוט כדי לאפס מעליו ומתחתיו בעמודה ונקבל:

$$
\begin{pmatrix}
x & y & z & w & b \\
0.25 & 1 & 0.25 & 0 & 10 \\
7.75 & 0 & -0.25 & 1 & 62 \\
-0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 20
\end{pmatrix}
$$

נשים לב כי כעת I בשתי השורות הוא על המשתנים y,z , וכי בקדקד זה, y=10,x=0 וזהו קדקד שחשבנו קודם. בקדקדק זה הרוח הוא 20.

כעת הבטוי השלילי ביותר בשורה התחתונה הוא 0.5- והמנות המתאימות מעליו הן 10/0.25=40,62/7.75=8 ולכן הפיבוט הבא יהיה בשורה השניה ובעמודה הראשונה. לכן נקבל:

$$
\begin{pmatrix}
x & y & z & w & b \\
0.25 & 1 & 0.25 & 0 & 10 \\
1 & 0 & -\frac{1}{31} & \frac{4}{31} & 8 \\
-0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 20
\end{pmatrix}
$$

ונקבל לאחר אפוס:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & w & b \\ 0 & 1 & \frac{8}{31} & -\frac{4}{31} & 8 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{31} & \frac{4}{31} & 8 \\ 0 & 0 & \frac{15}{31} & \frac{2}{31} & 24 \end{pmatrix}$$

נשים לב כי קבלנו את הקדקד x=8,y=8 ואת הרוח 24 .

תשובה לשאלה 9

א-נסמן ב-x את מספר לקוחות פלאפון בתחילת השנה, וב-y את מספר לקוחות סלקום. אז לאחר שנה יהיו $0.8x+0.1y$ לקוחות פלאפון ו- $0.2x+0.9y$ לקוחות סלקום. נוכל להציג את התשובה כ- $\begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Av$ כאשר A היא מטריצה קבועה ו-v הוא וקטור התפלגות האוכלוסיה. נשים לב כי סכום העמודות בכל עמודה של A הוא 1. מטריצה זו קרויה מטריצת Markov על שמו של מתמטיקאי רוסי.

ב-אחרי שנתים נקבל את הבטוי A^2v, אחרי שלש שנים את A^3v, ואחרי n שנים את הבטוי A^nv . נשים לב כי יש חשיבות לחזקות גבוהות של A.

מקרה א

נניח כי לפני תחילת התהליך היו מליון לקוחות לכל חברה. כמה לקוחות יהיו אחרי שנה, אחרי שנתיים?

$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 1.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.9 \\ 1.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.83 \\ 1.17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ נחשב גם בדרך אחרת:

$$M^2=\begin{pmatrix}0.8 & 0.1\\ 0.2 & 0.9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.8 & 0.1\\ 0.2 & 0.9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.66 & 0.17\\ 0.34 & 0.83\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}=M^2\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.66 & 0.17\\ 0.34 & 0.83\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.83\\ 1.17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}$$

מקרה ב

נניח כי בנתונים אחרים אחרי השנה השניה יש לפלאפון 1.17 מליון לקוחות ולסלקום יש 2.83 מליון לקוחות. מה היה מספר הלקוחות בתחילת התהליך?

כלומר יש לחשב את המטריצה ההפוכה ל-M^2. זאת נעשה $\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}=M^2\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=M^{-2}\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}$ לפי דטרמיננטים.

$$M=\begin{pmatrix}0.8 & 0.1\\ 0.2 & 0.9\end{pmatrix}\rightarrow M^{-1}=\frac{1}{0.7}\begin{pmatrix}0.9 & -0.1\\ -0.2 & 0.8\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}9 & -1\\ -2 & 8\end{pmatrix}\rightarrow M^{-2}=\frac{1}{49}\begin{pmatrix}9 & -1\\ -2 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9 & -1\\ -2 & 8\end{pmatrix}=\frac{1}{49}\begin{pmatrix}83 & -17\\ -34 & 66\end{pmatrix}$$

ולכן

$$\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=M^{-2}\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}=\frac{1}{49}\begin{pmatrix}83 & -17\\ -34 & 66\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1.17\\ 2.83\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$$

מקרה ג

נניח כי במקרה שלישי יש לפלאפון אחרי השנה השניה מליון לקוחות ולסלקום 2 מליון. מה היה מספר הלקוחות של כל חברה בתחילת התהליך?

$\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=M^{-2}\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}=\frac{1}{49}\begin{pmatrix}83 & -17\\ -34 & 66\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ וזה מראה כי המצב הזה יציב וכי הוקטור הזה הוא וקטור עצמי של המערכת.

תשובה 10

אם הנתון מתיחס למצב לפני תחילת האפוס כלפי מטה, אז התשובה היא לא, כי יתכן שבמהלך האפוס כלפי מטה תתבטלנה משוואות ויהיו יותר נעלמים ממשוואות. אם למצב בסוף האפוס כלפי מטה, אז כן, כי בשלב זה שויון בין מספר המשוואות והנעלמים מבטיח פתרון יחיד.

תשובה 11

נביט על $A=I, B=-I=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ אז שתיהן הפיכות אבל סכומן היא מטריצת ה-0 שאיננה הפיכה.

תשובה 12

נביט על $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ אז $A^2=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=2A$ אבל זו אינה המטריצה 2I.

תשובה 13

התשובה היא כן, ידוע כי אם $\det(A)\neq 0$ אז המטריצה הפיכה ויש פתרון יחיד ואם $\det(A)=0$ המטריצה אינה הפיהה ואז יש מצב של אינסוף פתרונות או אף פתרון. לכן מהנתון נובע שהדטרמיננט חיב להיות 0.