

השלמה באלגברה למנ"עס

שאלה ראשונה

במכללה תלמידי מחשבים מנ"עס ומשפטים. כל תלמיד מחשבים צריך שעת הרצאה בסמסטר, 4 שעות תרגול בסמסטר ו-5 שעות עבודה מנהלית בסמסטר. כל תלמיד מנ"עס צריך 2 שעות הרצאה בסמסטר, 9 שעות תרגול ו-9 שעות עבודה משרדית בשבוע. כל תלמיד משפטים צורך בסמסטר 3 שעות הרצאה, 11 שעות תרגול ו-15 שעות עבודה משרדית.

א. נתון כי למכללה 100 תלמידי מחשבים, 200 תלמידי מנ"עס ו-300 תלמידי משפטים. כמה שעות הרצאה תרגול ועבודה מנהלית על המכללה לגיס בסמסטר?

ב. נתון כי המכללה לגיס בסמסטר 1300 שעות הרצאה, 5000 שעות תרגול ו-6400 שעות עבודה משרדית. כמה תלמידי מחשבים, מנ"עס ומשפטים היא יכולה לקבל?

תשובה ל-א. מספר שעות הרצאה הוא $1 \times 100 + 2 \times 200 + 3 \times 300 = 100 + 400 + 900 = 1400$ שעות תרגול הוא $4 \times 100 + 9 \times 200 + 11 \times 300 = 200 + 1800 + 3300 = 5500$ ושעות העבודה המשרדית הוא $5 \times 100 + 9 \times 200 + 15 \times 300 = 500 + 1800 + 4500 = 6800$. המטריציאלית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 9 & 11 \\ 5 & 9 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1400 \\ 5500 \\ 6800 \end{pmatrix}$$

תשובה ל-ב

נתונה המשוואה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 9 & 11 \\ 5 & 9 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1300 \\ 5000 \\ 6400 \end{pmatrix}$$

פותרים אותה למשל על ידי המטריצה ההפוכה:

$$\begin{pmatrix} -36 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & -1 \\ 9 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

ויוצא $x=200, y=100, z=300$

שאלה שניה

בשוק יש שלשה מגזרי יצור: תעשייה, מסחר ופנאי. ידוע כי יצור כל שקל של התעשייה, צורך קניית 10 אגורות מהתעשייה, 20 אגורות מהמגזר המסחרי ו-30 אגורות ממשק הפנאי. ידוע כי יצור כל שקל של המגזר המסחרי, צורך קניית 20 אגורות מהתעשייה, 20 אגורות מהמגזר המסחרי ו-20 אגורות ממשק הפנאי. ידוע כי יצור כל שקל של תעשיית הפנאי, צורך קניית 20 אגורות מהתעשייה, 10 אגורות מהמגזר המסחרי ו-30 אגורות ממשק הפנאי.

ידוע כי השוק החפשי צורך כל שנה, 10 מליון שקלים מהתעשייה, 120 מליון שקלים מהמגזר המסחרי, ו-70 מליון שקלים ממשק הפנאי.

מה כמות היצור השנתית, במליוני שקלים, של כל מגזר כך שכל הדרישות של השוק החפשי תתמלאנה? תשובה: מתקבלת המשוואה:

$$\begin{pmatrix} 0.9 & -0.2 & -0.2 \\ -0.2 & 0.8 & -0.1 \\ -0.3 & -0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 120 \\ 70 \end{pmatrix}$$

ופתרונה הוא $x=100, y=200, z=200$ מליוני שקלים.

שאלה שלישית

בשוק יש שתי חברות טלפון אלחוטי: פלאפון וסלקום. ידוע כי השוק כלו מכוסה על ידי שתי חברות אלו. בשנה מסוימת, 80% מלקוחות פלאפון נשארו לקוחות, ו-20% עברו לחברת סלקום. באותה שנה, 90% מלקוחות סלקום נשארו בחברה, ו-10% עברו לפלאפון.

1- בטא את מספר הלקוחות בסוף השנה כפונקציה של המספר בתחילת אותה שנה.

2- הנה כי המגמה נמשכת שנים עם אותם מספרים. בטא את המספרים אחרי שנתיים, שלש, ו-n שנים.

תשובה

א-נסמן ב-x את מספר לקוחות פלאפון בתחילת השנה, וב-y את מספר לקוחות סלקום. אז לאחר שנה יהיו $0.8x + 0.1y$ לקוחות פלאפון ו- $0.2x + 0.9y$ לקוחות סלקום. נוכל להציג את התשובה כ-

כאשר A היא מטריצה קבועה ו-v הוא וקטור התפלגות האוכלוסיה. נשים לב $\begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Av$

כי סכום העמודות בכל עמודה של A הוא 1. מטריצה זו קרויה מטריצת Markov על שמו של מתמטיקאי רוסי.

ב-אחרי שנתיים נקבל את הבטוי A^2v , אחרי שלש שנים את A^3v , ואחרי n שנים את הבטוי $A^n v$. נשים לב כי יש חשיבות לחזקות גבוהות של A .

נניח כי לפני תחילת התהליך היו מליון לקוחות לכל חברה. כמה לקוחות יהיו אחרי שנה, אחרי שנתיים?

$$\text{נחשב גם בדרך אחרת: } \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 1.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.9 \\ 1.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.83 \\ 1.17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.66 & 0.17 \\ 0.34 & 0.83 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = M^2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.66 & 0.17 \\ 0.34 & 0.83 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.83 \\ 1.17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

מקרה ב

נניח כי בנתונים אחרים אחרי השנה השניה יש לפלאפון 1.17 מליון לקוחות ולסלקום יש 2.83 מליון לקוחות. מה היה מספר הלקוחות בתחילת התהליך?

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = M^2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = M^{-2} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

לפי דטרמיננטים. זאת נעשה

$$M = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix} \rightarrow M^{-1} = \frac{1}{0.7} \begin{pmatrix} 0.9 & -0.1 \\ -0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow M^{-2} = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 83 & -17 \\ -34 & 66 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = M^{-2} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 83 & -17 \\ -34 & 66 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.17 \\ 2.83 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

מקרה ג

נניח כי במקרה שלישי יש לפלאפון אחרי השנה השניה מליון לקוחות ולסלקום 2 מליון. מה היה מספר הלקוחות של כל חברה בתחילת התהליך?

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = M^{-2} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 83 & -17 \\ -34 & 66 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

הוא וקטור עצמי של במערכת.