

השלמה 2 באלגברה למנ"עס התשס"ה

הקלאי יכול לגדל חטה או שעורה. לחקלאי יש 60 דונם ומכסה של 90 מ"ק מים. גדול טונה של חטה דורש 2 דונם אדמה ומ"ק מים. גדול טונה של שעורה דורש 1 דונם אדמה ו-2 מ"ק מים. על כל טון של חטה החקלאי מקבל 2000 ₪, ועל כל טון שעורה-3000 ₪.

כיצד יחלק החקלאי את משאביו כדי לקבל מקסימום רווח?

תשובה: נסמן ב- x את הכמות בטונות של חטה שיגדל החקלאי, וב- y את הכמות בטונות של שעורה שיגדל החקלאי. נקבל שני אישויונים, אודות מגבלות משאביו: אי שוויון על כמות האדמה: $2x+y \leq 60$ ואי שוויון על כמות המים: $x+2y \leq 90$.

המשך תשובה א-גרפית.

נהפך כל אי שוויון לשוויון, ונביט על נקודות החתוך של כל ישר עם כל ציר, ועל נקודות החתוך של שני הישרים: נקבל את $(0,60), (90,0), (10,40), (0,45), (30,0)$. נציר את התחום הנקבע ובכך נקבל רק שלשה קדקדים: $(10,40), (0,45), (30,0)$. על כל קדקד נציב את פונקציית המטרה $2x+3y$ ונקבל כי מקסימום הרווח הוא כאשר $x=10, y=40$ ואז $2x+3y=140$ מיצג רווח מקסימלי באלפי שקלים.

המשך תשובה ב-מטריציאלית

נגדיר את המשתנה z המיצג את עודף האדמה שלא נוצלה, w המיצג את עודף המים שלא נוצלו, ונעבר לשוויונים: $2x+y+z=60, x+2y+w=90$.

כעת נבטא כל מצב על ידי מטריצה:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & w & b \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 60 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 90 \\ -2 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נשים לב כי מטריצת I בשתי השורות העליונות היא על z,w.

כעת נבחר את הבטוי הכי שלילי בשורה התחתונה. זהו -3. נביט על המנות $60/1=60$ ו- $90/2=45$. הבטוי החיובי הקטן ביותר הוא 45. לכן ה-2 בעמודה של y הוא הפיבוט הבא, ונקבל:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & w & b \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 60 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0.5 & 45 \\ -2 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כעת נשתמש בפיבוט כדי לאפס מעליו ומתחתיו בעמודה ונקבל:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & w & b \\ 1.5 & 0 & 1 & -0.5 & 15 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0.5 & 45 \\ -0.5 & 0 & 0 & 1.5 & 135 \end{pmatrix}$$

נשים לב כי כעת I בשתי השורות הוא על המשתנים y, z , וכי בקדקד זה, $y=45, x=0$ וזהו קדקד שחשבנו קודם. בקדקד זה הרוח הוא 135.

כעת הבטוי השלילי ביותר בשורה התחתונה הוא -0.5 והמנות המתאימות מעליו הן $45/0.5=90, 15/1.5=10$ ולכן הפיבוט הבא יהיה בשורה ובעמודה הראשונות. לכן נקבל:

$$\left(\begin{array}{ccccc} x & y & z & w & b \\ 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & 10 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0.5 & 45 \\ -0.5 & 0 & 0 & 1.5 & 135 \end{array} \right)$$

ונקבל לאחר אפוס:

$$\left(\begin{array}{ccccc} x & y & z & w & b \\ 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & 10 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 40 \\ 0 & 0 & 1/3 & 4/3 & 140 \end{array} \right)$$

נשים לב כי קבלנו את הקדקד $x=10, y=40$ ואת הרוח 140.