השלמה 3 באלגברה למנ"עס התשס"ה

מצא נקודות קיצון מקומי לפונקציות הבאות:

1.$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, 2.$f(x,y,z)=-(x^2+y^2+z^2)$, 3.$f(x,y,z)=x^3-16y^3+z^3-4xy+xz$

תשובה 1:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x,\frac{\partial f}{\partial y}=2y,\frac{\partial f}{\partial z}=2z\rightarrow x=y=z=0.$$

נסדר את מטריצת ההסיאן:

$$\begin{array}{cccc} & x & y & z \\ x & 2 & 0 & 0 \\ y & 0 & 2 & 0 \\ z & 0 & 0 & 2 \end{array}$$

הדטרמיננטים הם בהתאמה: 2, 4, 8 ולכן זוהי נקודת מינימום.

תשובה 2

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-2x,\frac{\partial f}{\partial y}=-2y,\frac{\partial f}{\partial z}=-2z\rightarrow x=y=z=0.$$

נסדר את מטריצת ההסיאן:

$$\begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline x & -2 & 0 & 0 \\ y & 0 & -2 & 0 \\ z & 0 & 0 & -2 \end{array}$$

הדטרמיננטים הם בהתאמה: 2, 4-, 8 ולכן זוהי נקודת מקסימום.

.3

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 4y + z, \frac{\partial f}{\partial y} = -48y^2 - 4x, \frac{\partial f}{\partial z} = 3z^2 + x$$

$$\to x = -3z^2, x = -12y^2 \to 3z^2 = 12y^2 \to z^2 = 4y^2$$

$$\to z = \pm 2y.$$

קבלנו שתי אפשרויות, ונבדק כל אחת לחוד:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-4y+z,\frac{\partial f}{\partial y}=-48y^2-4x,\frac{\partial f}{\partial z}=3z^2+x,$$

$$z=2y\rightarrow 3x^2-4y+2y=0,12y^2+x=0,3(2y)^2+x=0$$

$$\rightarrow 3x^2-2y=0,12y^2+x=0,\rightarrow x=-12y^2,$$

$$3(-12y^2)^2-2y=0\rightarrow 432y^4-2y=0$$

$$\rightarrow 2y(216y^3-1)=0\rightarrow y=0,(6y)^3=1,$$

$$\rightarrow y=0,y=\frac{1}{6}.$$

אם y=0 נובע כי x=z=0 ולכן קבלנו נקודה חשודה (0,0,0) .

אם y=1/6 נובע כי x=-1/3,z=1/3 ולכן קבלנו נקודה חשודה -)1/6=(-1/3,1/6,1/3)
2,1,2) .

כעת נניח כי z=-2y נציב שוב ונקבל:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-4y+z,\frac{\partial f}{\partial y}=-48y^2-4x,\frac{\partial f}{\partial z}=3z^2+x$$

$$z=-2y\to 3x^2-4y-2y=0,12y^2+x=0,3(2y)^2+x=0$$

$$\to 3x^2-6y=0,12y^2+x=0,\to x=-12y^2,$$

$$3(-12y^2)^2-6y=0\to 432y^4-6y=0$$

$$\to 6y(72y^3-1)=0\to y=0,(2\sqrt[3]{9}y)^3=1,$$

$$\to y=0,y=\frac{1}{2\sqrt[3]{9}}.$$

עבור y=0 מקבלים שוב את (0,0,0) ועבור y=1/2√ נקבל את הנקודה

$$(\frac{-1}{\sqrt[3]{3}},\frac{1}{2\sqrt[3]{9}},\frac{-1}{\sqrt[3]{9}})$$

נחשב כעת את מטריצת ההסיאן ונציב את שלש הנקודות.

$$H=\left(\begin{array}{cccc} & x & y & z \\ x & 6x & -4 & 1 \\ y & -4 & -96y & 0 \\ z & 1 & 0 & 6z \end{array}\right)$$

ולכן הדטרמיננטים הם $6x,16(-36xy-1),96(y-z-36xyz)$ נשים לב כי הסימן של הבטוי השני הוא כמו של $-36xy-1$ והסימן של הבטוי השלישי הוא כמו של: $y-z-36xyz$.

נציב את הנקודה $(0,0,0)$ ונקבל את המספרים $0,-1,0$ ולכן זוהי נקודת אוכף.

נציב את הנקודה $(-1/3,1/6,1/3)$ ונקבל את המספרים $-2,1,1/2$ ולכן זוהי נקודת אוכף.

נציב את הנקודה השלישית ונקבל את המספרים

$$\frac{-6}{\sqrt[3]{3}},5,\frac{-9}{2\sqrt[3]{9}}$$

ולכן זוהי נקודת מקסימום.