מתמטיקה ב' – מנהל עסקים - דוגמא

המרצים: דולה, בלנוב
משך הבחינה שעתיים וחצי. אפשר להשתמש רק במחשבון כיס. אין לפרק את השאלון.
בתום הבחינה עליך להחזיר את כל השאלון. המחברת משמשת כטיוטה בלבד ולא תאסף.

<u>יש לענות על חמש שאלות מתוך שאלות 1-8 בחלק א . בחלק ב יש לענות על כל השאלות</u>. בשאלון שבו נענו יותר שאלות מהדרוש, תיבדקנה רק הראשונות, והשאלות המיותרות לא תיבדקנה. בחלק א' כל שאלה שווה 10 נקודות ובחלק ב' לפי המצוין בשאלות.

<u>חלק א'.</u>
הוראות: בשאלות אלו עליך לרשום את התשובה הסופית בתוך התיבה המתאימה, ובחלק מהן יש אפשרות לתשובה חלקית.

1. הפתרון הכללי של מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \\ 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 6 \\ 7x_1 - 14x_2 + 5x_3 + 16x_4 = 13 \end{cases}$$

שווה ל:

שאלה עבור ניקוד חלקי:
כתוב את המטריצה בשלב שבו איפסת שלוש מקומות מתחת ל-1 של עמודת ה-x_1 .
תשובה:

2. נתונה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, כתוב את A^{-1} :

תשובה עבור נקוד חלקי:

א. באם עבדת על ידי שיטת גאוס על מטריצה 3x6, כתוב את המטריצה 3x6 שקבלת לאחר שאיפסת את שני האיברים מתחת ל-1 בטור הראשון.

ב. באם עבדת בדרך של המטריצה הצמודה, כתוב את det(A) .
.

3. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+3y+az=7 \\ 4x+9y+a^2z=17 \end{cases}$$

כאשר a הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של a יש למערכת פתרון יחיד ?

תשובה:	

ב. עבור איזה ערכים של a למערכת אין שום פתרון ?

תשובה:	

ג. עבור איזה ערכים של a למערכת יש אינסוף פתרונות ?

תשובה:	

עבור נקוד חלקי:

אם עבדת בשיטת גאוס, כתוב את המטריצה לאחר אפוס העמודה הראשונה. אם עבדת לפי דטרמיננטה, כתוב את הדטרמיננטה של המערכת.

4 מצא את המטריצה A^* אם ידוע ש- $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{pmatrix}$.

5. תהיה $\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&a&1\\1&1&-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ ממ"ל. מצא את x לפי שיטת קרמר.

6. מצא ומיין את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:

$$f(x,y)=-x^3-y^2-3x^2+6xy+8y-9x$$

7. מצא ומיין את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:

$$f(x,y)=x^2+y^2+z^2$$

עבור נקוד חלקי:

כתוב את מטריצת הסיאן המתקבלת.

8. בשוק יש שתי חברות טלפון אלחוטי: פלאפון וסלקום. ידוע כי השוק כלו מכוסה על ידי שתי חברות אלו. בשנה מסוימת, 80% מלקוחות פלאפון נשארו לקוחות, ו-20% עברו לחברת סלקום. באותה שנה, 90% מלקוחות סלקום נשארו בחברה, ו-10% עברו לפלאפון.

1-בטא את מספר הלקוחות בסוף השנה כפונקציה של המספר בתחילת אותה שנה.

2-הנח כי המגמה נמשכת שנים עם אותם מספרים. בטא את המספרים אחרי שנתים, שלוש, ו k - שנים.

3-נניח כי לפני תחילת התהליך היו מליון לקוחות לכל חברה. כמה לקוחות יהיו אחרי שנה וכמה אחרי שנתיים?

1: 2:

3:

<u>חלק ב'</u>

הוראות: בשאלות אלו עליך לרשום את התשובה הסופית בתוך התיבה המתאימה.

9. חשב שניים משלושת האינטגרלים הבאים: (20%)

א: $\int (x^2+3)e^{-2x}dx =$

ב: $\int x^3 \ln x dx =$

ג: $\int \frac{3x+3}{\sqrt{2x^2+4x-3}}dx =$

10. ענה על אחד מתוך שני הסעיפים הבאים: (15%)

א: חשב את השטח החסום על ידי הגרפים של הפונקציות:

$f(x)=x^3+6x^2$ ו $g(x)=x^4-4x^3$.

השטח הוא:
יש לרשום גם את האינטגרל המסויים

ב: חשב את נפח גוף הסיבוב המתקבל מסיבוב סביב ציר ה - x

של השטח המוגבל בין הגרפים של הפונקציות $y=e^x$, $y=x\sqrt{x}$,

הישר $x=1$ וציר ה- y .

הנפח הוא:
יש לרשום גם את האינטגרל המסויים:

11. מצא את נקודות מינימום והמקסימום המוחלטים הפונקציה: (15%)

$$f(x,y)=xy+\frac{y^2}{2}-y-\frac{x^3}{3}+x+2$$

בתחום הבא: משולש שקודקודיו הם (4,0) , (0,2) , (-2, 0) .

מינימום מוחלט:
מקסימום מוחלט:

ניקוד חלקי:

כל הנקודות החשודות:

בהצלחה !

תשובות

תשובה 1

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 5 \\ 3 & -6 & 2 & 7 & 6 \\ 7 & -14 & 5 & 16 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_4-7S_1 \to S_4]{S_2-2S_1\to S_2, S_3-3S_1\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_4-2S_2\to S_4]{S_1+S_2\to S_1, S_3-S_2\to S_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נסמן $x_1 = x, x_2 = y = s, x_3 = z, x_4 = w = t$ ונקבל פתרון:

$$x-2y+3w=4, -z+w=3, \to x=2y-3w+4, z=w-3,$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y-3w+4 \\ y \\ w-3 \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

תשובה 2

נעבד לפי שיטת גאוס:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-2S_1\to S_3]{S_2-3S_1\to S_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_2-S_3\to S_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 6 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_3+5S_2\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_1+3S_3\to S_1]{S_2+S_3\to S_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -20 & 15 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_1-2S_2\to S_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

ואכן קל לראות כי $\begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ היא אכן ההפוכה של A.

תשובה 3

.3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & a & 7 \\ 4 & 9 & a^2 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-4S_1\to S_3]{S_2-2S_1\to S_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a-2 & 1 \\ 0 & 5 & a^2-4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3-5S_2\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a-2 & 1 \\ 0 & 0 & f(a) & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(a) = a^2-4-5(a-2) = (a-2)(a+2)-5(a-2) = [a+2-5](a-2) = (a-3)(a-2)$$

לכן כאשר f(a) מתאפס (כלומר a=2,3) יש למערכת אינסוף פתרונות ולכל a אחר נציב במערכת המקורית ונראה כי יש למערכת פתרון יחיד.

תשובה 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \to A^* = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

תשובה 5

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$ הדטרמיננטה של הממ"ל שווה ל-

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix} = (-2)\cdot \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} - 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} + 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2)(-a^2-1) - (-a-1) + (1-a) = 2a^2+4$$

הדטרמיננטה תמיד שונה מאפס, לכן ניתן להשתמש בשיטת קרמר.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 4 & 1 & -a \end{vmatrix}}{2a^2+4} = \frac{1\cdot \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} - 1\cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -a \end{vmatrix} + 1\cdot \begin{vmatrix} 2 & a \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{2a^2+4} = \frac{-a^2+5-2a}{2a^2+4}$$

תשובה 6

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 - 6x + 6y - 9, \frac{\partial f}{\partial y} = -2y + 6x + 8 \to$$

$$y = 3x + 4 \to -3x^2 - 6x + 6(3x+4) - 9 = 0. \to$$

$$-3(x^2 - 4x - 5) = 0 \to (-1,1), (5,19)$$

נסדר את מטריצת ההסיאן:

$$
\begin{array}{c|cc}
 & x & y \\
\hline
x & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\begin{pmatrix} -6x-6 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$}} \\
y & & \\
\end{array}
$$

ולכן $\Delta = 12x + 12 - 36 = 12x - 24 = 12(x-2)$ בנקודה (-1,1) הבטוי שלילי ולכן זו נקודת אוכף. בנקודה (5,19), הבטוי חיובי ולכן יש קיצון.

מכיון ש $f''_{x,x} = -6(x+1) = -36$ זוהי נקודת מקסימום.

תשובה 7:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \frac{\partial f}{\partial z} = 2z \rightarrow x = y = z = 0.$$

נסדר את מטריצת ההסיאן:

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & x & y & z \\
\hline
x & 2 & 0 & 0 \\
y & 0 & 2 & 0 \\
z & 0 & 0 & 2
\end{array}
\qquad
\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
$$

הדטרמיננטים הם בהתאמה: 2, 4, 8 והסימנים הם +,+,+ ולכן זוהי נקודת מינימום.

תשובה 8:

א-נסמן ב-x את מספר לקוחות פלאפון בתחילת השנה, וב-y את מספר לקוחות סלקום. אז לאחר שנה יהיו $0.8x+0.1y$ לקוחות פלאפון ו- $0.2x+0.9y$ לקוחות סלקום. נוכל להציג את התשובה כ-

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Av$$

כאשר A היא מטריצה קבועה ו-v הוא וקטור התפלגות האוכלוסיה. נשים לב כי סכום העמודות בכל עמודה של A הוא 1. מטריצה זו קרויה מטריצת Markov על שמו של מתמטיקאי רוסי.

ב-אחרי שנתים נקבל את הבטוי A^2v, אחרי שלש שנים את A^3v, ואחרי n שנים את הבטוי A^nv . נשים לב כי יש חשיבות לחזקות גבוהות של A.

מקרה א

נניח כי לפני תחילת התהליך היו מליון לקוחות לכל חברה. כמה לקוחות יהיו אחרי שנה, אחרי שנתיים?

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 1.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.9 \\ 1.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.83 \\ 1.17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

נחשב גם בדרך אחרת:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.66 & 0.17 \\ 0.34 & 0.83 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = M^2\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.66 & 0.17 \\ 0.34 & 0.83 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.83 \\ 1.17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

מקרה ב

נניח כי בנתונים אחרים אחרי השנה השניה יש לפלאפון 1.17 מליון לקוחות ולסלקום יש 2.83 מליון לקוחות. מה היה מספר הלקוחות בתחילת התהליך?

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = M^2\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = M^{-2}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

כלומר יש לחשב את המטריצה ההפוכה ל-M^2. זאת נעשה לפי דטרמיננטים.

$$M = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix} \to M^{-1} = \frac{1}{0.7}\begin{pmatrix} 0.9 & -0.1 \\ -0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \to M^{-2} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 83 & -17 \\ -34 & 66 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = M^{-2}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 83 & -17 \\ -34 & 66 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1.17 \\ 2.83 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

תשובה 9

סעיף א

$$\int (x^2+3)e^{-2x}dx=?,\ f'=e^{-2x}, g=x^2+3\to f=\frac{-e^{-2x}}{2}, g'=2x\to$$
$$\int (x^2+3)e^{-2x}dx=\frac{-e^{-2x}(x^2+3)}{2}+\int 2x\frac{e^{-2x}}{2}dx=$$
$$=\frac{-e^{-2x}(x^2+3)}{2}+\int xe^{-2x}dx\to f'=e^{-2x}, g=2x\to f=\frac{-e^{-2x}}{2}, g'=2\to$$
$$\int (x^2+3)e^{-2x}dx=\frac{-e^{-2x}(x^2+3)}{2}+(\frac{-e^{-2x}}{2}x+\int\frac{e^{-2x}}{2}dx)=$$
$$\frac{-e^{-2x}(x^2+3)}{2}+\frac{-e^{-2x}}{2}x+\frac{-e^{-2x}}{4}=\frac{-e^{-2x}}{4}(2x^2+6+2x+1)+c=$$
$$=\frac{-e^{-2x}}{4}(2x^2+2x+7)+c=$$

סעיף ב

:

$$\int x^3\ln x dx=?,\ f'=x^3, g=\ln x,\ f=\frac{x^4}{4}, g=\frac{1}{x}\to\int x^3\ln x dx=\frac{x^4\ln x}{4}-\int\frac{x^4}{4}\frac{1}{x}dx=$$
$$=\frac{x^4\ln x}{4}-\int\frac{x^3}{4}dx=\frac{x^4\ln x}{4}-\frac{x^4}{16}+c=\frac{x^4}{16}(4\ln x-1)+c$$

סעיף ג

:

$$\int\frac{3x+3}{\sqrt{2x^2+4x-3}}dx=\int\frac{3(x+1)}{\sqrt{2x^2+4x+2-5}}dx=\int\frac{3(x+1)}{\sqrt{2(x^2+2x+1)-5}}dx=\int\frac{3(x+1)}{\sqrt{2(x+1)^2-5}}dx\to$$
$$u=2(x+1)^2-5, du=4(x+1)dx\to\frac{3du}{4}=3(x+1)dx\to\int\frac{3x+3}{\sqrt{2x^2+4x-3}}dx=\int\frac{3/4}{\sqrt{u}}du=\frac{3}{2}\int\frac{du}{2\sqrt{u}}=$$
$$=1.5\sqrt{u}+c=1.5\sqrt{2(x+1)^2-5}+c$$

תשובה 10

סעיף א

$$f(x)=g(x)\to x^3+6x^2=x^4-4x^3\to x^4-5x^3-6x^2=0\to x^2(x-6)(x+1)=0\to$$
$$x=6, x=-1, x=0,\ f(-0.5)=11/8, g(-0.5)=9/16,\ f(1)=7, g(1)=-3.$$
$$S=\int_{-1}^{0}[(x^3+6x^2)-(x^4-4x^3)]dx+\int_{0}^{6}[(x^3+6x^2)-(x^4-4x^3)]dx=$$
$$=\int_{-1}^{0}(5x^3+6x^2-x^4)dx+\int_{0}^{6}(5x^3+6x^2-x^4)dx, F=1.25x^4+2x^3-x^5/5, F(6)=$$
$$1620+432-1.2*1296=2052-1555.2=496.8, F(0)=0, F(-1)=-0.55.$$
$$S=F(6)-F(0)+F(0)-F(-1)=F(6)-F(-1)=497.35$$

סעיף ב

לפי הציור אחת הפונקציות גדולה מהשניה לכל אורך הקטע וכיון ש-f(0)=1,g(0)=0 הרי שהעליונה היא f והתחתונה g. ולכן:

$$V=\pi\int_0^1(e^x)^2dx-\pi\int_0^1(x\sqrt{x})^2dx=\pi\int_0^1(e^{2x}-x^3)dx, F=\pi(\frac{e^{2x}}{2}-\frac{x^4}{4}), F(1)-F(0)=\pi(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+0)=$$
$$=\frac{\pi}{4}(2e^2-3)=\frac{\pi}{4}(11.778112)=2.944528\pi=9.2505076.$$

תשובה 11

מצא את נקודות מינימום והמקסימום המוחלטים הפונקציה: (15%)

$$f(x,y)=xy+\frac{y^2}{2}-y-\frac{x^3}{3}+x+2$$

בתחום הבא: משולש שקודקודיו הם (4,0) , (0,2) , (-2, 0) .

קודם נחשב נקודות קיצון מקומי. נקבל

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y-x^2+1,\frac{\partial f}{\partial y}=x+y-1\rightarrow y=x^2-1=1-x\rightarrow$$

$$x^2+x-2=(x-1)(x+2)=0\rightarrow(1,0),(-2,3).$$

רק הנקודה (1,0) היא בתחום והנקודה (-2,3) לא בתחום ונתעלם ממנה.

כעת נחשב את משוואות שלש ישרי המשולש ואז קיצון מקומי על כל פונקציה של משתנה אחד.

הנקודות (-2,0),(4,0) הן על הישר y=0 . נציב בפונקציה ונקבל

$$f(x,y)=xy+\frac{y^2}{2}-y-\frac{x^3}{3}+x+2\rightarrow f(x,0)=-\frac{x^3}{3}+x+2,\ f'=-x^2+1,\ f'=0\rightarrow x=\pm1,$$

$$(-1,0),(1,0)$$

הנקודות (4,0),(0,2) הן על הישר x+2y=4 . או x=4-2y נציב בפונקציה ונקבל

$$f(4-2y,y)=(4-2y)y+\frac{y^2}{2}-y-\frac{(4-2y)^3}{3}+4-2y+2\rightarrow f(y)=y-1.5y^2-\frac{(4-2y)^3}{3}+6$$

$$f'=1-3y-(4-2y)^2(-2)=2(4-2y)^2-3y+1=8(2-y)^2-3y-1=8y^2-35y+31,\ f'=0\rightarrow y=3,11/8$$

$$\rightarrow(-2,3),\frac{(10,11)}{8}.$$

רק הנקודה (10/8,11/8) היא בתחום והנקודה (-2,3) לא בתחום ונתעלם ממנה.

הנקודות (-2,0),(0,2) הן על הישר y=2-x נציב בפונקציה ונקבל

$$f(x,2-x)=x(2-x)+\frac{(2-x)^2}{2}-(2-x)-\frac{x^3}{3}+x+2\rightarrow f(x,2-x)=4x-\frac{4x^2}{3}+\frac{(x-2)^2}{2},$$

$$f'=4-\frac{8x}{3}+(x-2)=-\frac{5x}{3}+2,\ f'=0\rightarrow x=1.2\rightarrow(1.2,0.8).$$

גם נקודה זו איננה בתחום, ובסה"כ נקבל את הנקודות החשודות הבאות:

$$(1,0),(-1,0),\frac{(10,11)}{8},(0,2),(-2,0),(4,0).$$

נציב את הנקודוות ב-f ונקבל את נקודות הקיצון.

$$(x,y) = (1,0), (-1,0), \frac{(10,11)}{8}, (0,2), (-2,0), (4,0).$$

$$f(x,y) = \frac{8}{3} --, \frac{4}{3} --, \frac{511}{128} --, 2 --, \frac{8}{3} --, \frac{-46}{3}$$

ולכן המקסימום מתקבל ב $f\,\frac{(10,11)}{8} = \frac{511}{128}$ והמינימום מתקבל ב $f(4,0) = \frac{-46}{3}$