

# המכללה האקדמית נתניה

מבחן במתמטיקה א' – בנקאות ושוק ההון

שם המרצה: גיורא דולה

תאריך הבחינה: יום ה' י"ג שבט התש"ע 28-1-2020

משך הבחינה: שעתיים וחצי

חומר עזר: מחשבון (לא גרפי).

חלק א' ייבדק רק לפי התשובות הסופיות שיופיעו על טופס הבחינה. חלק ב' ייבדק לפי המחברת.

## חלק א.

1. חשב שניים משלושת הגבולות הבאים:  
(20%)

א:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 4^x}{x - 2^{3x}}$$

א. 5

ב. 0

ג.  $-\infty$

ד.  $\infty$

ה. אף אחת מהתשובות האחרות איננה נכונה.

ב: 
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 7x^2 + 8x} \right)^{2x+3}$$

א. 1

ב.  $e^{-8}$

ג.  $e^8$

ד.  $e$

ה. אף אחת מהתשובות האחרות איננה נכונה.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{4x^3 + 7} - \sqrt{4x^3 - 5})$$

ג.

א. 4

ב. -3

ג. 3

ד. 0

ה. אף אחת מהתשובות האחרות איננה נכונה.

$$f(x) = \frac{3+9x}{4-5x}$$

2. מצא את הפונקציה ההפוכה לפונקציה

(10%)

3. גזור את הפונקציה הבאה וצמצם במידת האפשר:

(10%)

$$f(x) = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$$

$$f'(x) =$$

4. נתונות הפונקציות:  $f(x) = (5x^3 - 7x)^{10}$  ו  $g(x) = \frac{9-6x^5}{\sqrt{4x-1}}$

(10%)

חשב את:  $f(g(x))$  ואת  $g(f(x))$ .

$$f(g(x)) =$$

5. על כל אחת מהשאלות הבאות יש לענות רק "כן" או "לא". משקל של כל אחת

מהשאלות שווה ל 3 נקודות.

א: הפונקציה  $f(x) = \frac{x-5}{(x-6)^2}$  היא פונקציה זוגית.

כן	לא

ב: הפונקציה  $f(x) = \frac{3}{(x-6)^2}$  היא חד-חד-ערכית

כן	לא

ג. הפונקציה  $y = \frac{e^{-3}}{7x+e^2}$  היא פונקציה רציונאלית.

כן	לא

חלק ב'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על כל אחת מהשאלות הבאות:

6. עבור אילו ערכי  $a$  ו  $b$  הפונקציה הבאה תהיה רציפה לכל  $x$ . (15%)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x^2 + 6x - 8}{2a(x-2)} & x > 2 \\ 3 & x = 2 \\ \frac{b+5}{a + e^{\frac{5}{x-2}}} & x < 2 \end{cases}$$

7. מניין את נקודות אי הרציפות של הפונקציה הבאה: (15%)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{54-2x^3}{2x^2-7x+3} & x > 3 \\ 6 & x = 3 \\ \frac{12}{2+e^{\frac{-5}{(x-3)^3}}} & x < 3 \end{cases}$$

8. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - x^3$  (15%)

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- תחום הגדרה
- חיתוך עם הצירים
- תחומי עלייה וירידה
- נקודות קיצון
- תחומי קמירות וקעירות
- נקודות פיתול
- זוגיות/איזוגיות הפונקציה

בהצלחה!!!

תשובות

תשובה 1-א

יש לחלק בחזקה הגבוהה ביותר שהיא  $2^{3x}=8^x$  ולקבל:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 4^x}{x - 2^{3x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(5x^2 / 8^x) + (4^x / 8^x)}{(x / 8^x) - (2^{3x} / 8^x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{0 + (0.5)^x}{0 - (1)} = \frac{0 + 0}{0 - 1} = 0$$

תשובה 1-ב

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 7x^2 + 8x} \right)^{2x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 - 7x^2 + 8x}{x^3 - 7x^2 + 8x} + \frac{4x^2 - 8x + 4}{x^3 - 7x^2 + 8x} \right)^{2x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{4x^2 - 8x + 4}{x^3 - 7x^2 + 8x} \right)^{2x+3} = e^a,$$

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 8x + 4}{x^3 - 7x^2 + 8x} (2x+3) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 + \dots}{x^3 - 7x^2 + 8x} = 8$$

תשובה 1-ג

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{4x^3 + 7} - \sqrt{4x^3 - 5}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{4x^3 + 7} - \sqrt{4x^3 - 5}) \frac{\sqrt{4x^3 + 7} + \sqrt{4x^3 - 5}}{\sqrt{4x^3 + 7} + \sqrt{4x^3 - 5}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x[(4x^3 + 7) - (4x^3 - 5)]}{\sqrt{4x^3 + 7} + \sqrt{4x^3 - 5}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x}{\sqrt{4x^3 + 7} + \sqrt{4x^3 - 5}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8}{(\sqrt{4x^3 + 7})/x + (\sqrt{4x^3 - 5})/x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8}{(\sqrt{4(x^3/x^2) + 7/x^2}) + (\sqrt{4(x^3/x^2) - 5/x^2})} = \frac{8}{(\sqrt{4\infty + 0}) + (\sqrt{4\infty - 0})} = \frac{8}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

תשובה 2

$$\begin{aligned} y &= \frac{3+9x}{4-5x} \rightarrow y(4-5x) = 3+9x \rightarrow 4y-5xy = 3+9x \rightarrow 4y-3 = 9x+5xy = x(9+5y) \rightarrow \\ x &= \frac{4y-3}{5y+9} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{4x-3}{5x+9}. \end{aligned}$$

תשובה 3

נפשט את הפונקציה לפני הגזירה ואחכ נגזור:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(e^{-x} + xe^{-x}) = \ln(e^{-x}(1+x)) = \ln(e^{-x}) + \ln(1+x) = -x + \ln(1+x) \rightarrow \\ f'(x) &= -1 + \frac{1}{1+x} (0+1) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1}{1+x} - \frac{1+x}{1+x} = \frac{-x}{1+x}. \end{aligned}$$

תשובה 4

. נתונות הפונקציות:  $f(x) = (5x^3 - 7x)^{10}$  ו  $g(x) = \frac{9-6x^5}{\sqrt{4x-1}}$  (10%)

$$(g \circ f)(x) = \frac{9-6[f(x)]^5}{\sqrt{4f(x)-1}} = \frac{9-6[(5x^3-7x)^{10}]^5}{\sqrt{4(5x^3-7x)^{10}-1}}$$

$$(f \circ g)(x) = (5(g(x))^3 - 7g(x))^{10} = (5(\frac{9-6x^5}{\sqrt{4x-1}})^3 - 7\frac{9-6x^5}{\sqrt{4x-1}})^{10}$$

תשובה 5-א

לפונקציה  $f(x) = \frac{x-5}{(x-6)^2}$  אין סימטריה בכלל כי תחום ההגדרה שלה הוא  $R - \{6\}$  ואיננו סימטרי. בנוסף, מי שלא שם לב לעובדה הקודמת, הפעלת מינוס לא מחזירה את המונה ואת המכנה למצב הקודם.

תשובה 5-ב

הפונקציה  $f(x) = \frac{3}{(x-6)^2}$  איננה חח"ע כי

$$f(5) = \frac{3}{(5-6)^2} = \frac{3}{(-1)^2} = \frac{3}{1} = 3, f(7) = \frac{3}{(7-6)^2} = \frac{3}{(1)^2} = \frac{3}{1} = 3, 5 \neq 7$$

תשובה 5-ג

הפונקציה  $y = \frac{e^{-3}}{7x+e^2}$  היא רציונלית כי היא מנה של שני פולינומים. הקבועים הכוללים את e הם מספרים אירציונליים אבל פולינום יכול להכיל מספרים אי רציונליים.

תשובה 6

הנקודה היחידה שבה הענף העליון לא מוגדר היא  $x=2$  שבה במילא יש שני מענף לענף, ולכן נותר לחשב את שני הגבולות החד צדדיים ב  $x=2$  ולהשוותם ל-3 ואכן נקבל:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^2 + 6x - 8}{2a(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x-2)(x-4)}{2a(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x-4)}{2a} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4-x}{2a} = \frac{2}{2a} = \frac{1}{a}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{b+5}{a+e^{\frac{5}{x-2}}} = \frac{b+5}{a+e^{\frac{5}{(2^-)-2}}} = \frac{b+5}{a+e^{\frac{5}{0^-}}} = \frac{b+5}{a+e^{-\infty}} = \frac{b+5}{a+0} = \frac{b+5}{a}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{b+5}{a} = 3 \rightarrow a = 1/3, b = -4 \quad \text{ולכן:}$$

## תשובה 7

נביט בפונקציה ונחפש בה נקודות בעיתיות. עבור הענף הימני, המכנה שווה ל- $(2x-1)(x-3)$ , ולכן מתאפס ב- $x=0.5, 3$ , אבל  $0.5$  לא בתחום ההגדרה של הענף הימני ולכן  $0$  היא נקודת חוסר הרציפות האפשרית היחידה בגרף ונחשב את הגבולות:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{54 - 2x^3}{2x^2 - 7x + 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2(27 - x^3)}{(2x-1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2(3-x)(9+3x+x^3)}{(2x-1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2(9+3x+x^3)}{(2x-1)} = -\frac{54}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{12}{2+e^{\frac{-5}{(x-3)^3}}} = \frac{12}{2+e^{\frac{-5}{((3^-)-3)^3}}} = \frac{12}{2+e^{\frac{-5}{(0^-)^3}}} = \frac{12}{2+e^\infty} = \frac{12}{\infty} = 0$$

ולכן הנקודה היא נקודת קפיצה.

## תשובה 8

נקבל כי הפונקציה היא פולינום ולכן תחום ההגדרה הוא כל  $x$ . עבור אי/זוגיות נציב

בפונקציה

$$f(-x) = \frac{3}{4}(-x)^4 - (-x)^3 = \frac{3}{4}x^4 + x^3$$

ולכן הפונקציה היא כללית. עבור חתוכים עם הצירים נקבל:

$$\frac{3}{4}x^4 - x^3 = 0 \rightarrow x^3\left(\frac{3x}{4} - 1\right) = 0 \rightarrow x = 0, x = \frac{4}{3}$$

ולעומת זה אם מציבים  $x=0$  מקבלים  $y=0$ .

לכן נקודות החתוך הן:  $(0,0), (0,4/3)$ .

$$y = \frac{3}{4}x^4 - x^3 \rightarrow y' = 3x^3 - 3x^2 = 3x^2(x-1), y'' = 9x^2 - 6x = 3x(3x-2).$$

ולכן יש 3 נקודות התאפסות לנגזרות והן  $x=0, 2/3, 1$  ומוגדרים ארבעה קטעים. נבחר נציג לכל קטע ונציב בנגזרות ונקבל את הטבלה הבאה:

קטע/נקודה	$(-\infty, 0)$ קטע	$(0,0)$ נקודה	$(0,2/3)$ קטע	$(2/3, 8/27)$ נקודה	$(2/3,1)$ קטע	$(1,-1/4)$ נקודה	$(1,4/3)$ קטע	$(4/3,0)$ נקודה	$(0,\infty)$ קטע
סימן $f'$	-		-		-		+		+
סימן $f''$	+		-		+		+		+
ל $f$ יש	↘	פתולח תוך ציר $x,y$	↗	פתול	↘	מינ מחלט	↗	חתוך ציר $x$	↗

ולכן הטווח המדויק הוא הקטע ממינוס 0.25 ועד אינסוף.



## דף נוסחאות

### 1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$\begin{aligned}a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b), \quad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2; \\(a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3, \\a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2), \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)\end{aligned}$$

### 2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה  $ax^2 + bx + c = 0$  (הוא  $a \neq 0$ ) הוא  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ .

ב. פירוק הטרינום  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ .

### 3. חזקות ושורשים

$$\begin{aligned}a^x a^y &= a^{x+y}, \quad (ab)^x = a^x b^x, \quad \sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}, \quad \sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}}, \\ \frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \frac{b^x}{a^x}, \quad a^0 = 1, \\ (a^x)^y &= a^{xy}, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \quad \sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{ab}\end{aligned}$$

### 4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log:  $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

תחום ההגדרה:  $\log_a x$  מוגדר רק כאשר  $x > 0$  ו-  $0 < a, a \neq 1$ .

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a x^y = y \cdot \log_a x;$$

$$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y, \quad \log_a \sqrt[y]{x} = \frac{1}{y} \cdot \log_a x;$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad \log_a x = \frac{1}{\log_x a};$$

$$a^{\log_a x} = x,$$

$$\ln x = \log_e x, \quad e = 2.718281828\dots$$

$$\ln x = a \Rightarrow x = e^a$$

## 5. הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

$\pi$  רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \tan x \cdot \cot x = 1;$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

6. הגדרת נגזרת הפונקציה  $f$  בנקודה  $x_0$ :  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

7. נגזרות בסיסיות.

$$(x^a)' = ax^{a-1}, \quad (a^x)' = \ln a \cdot a^x;$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (e^x)' = e^x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

8. כללי גזירה

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x);$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

$$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

## 9. אינטגרלים מיידיים

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C;$$

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, a \neq -1;$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C;$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

## 10. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx;$$

$$\int af(x) dx = a \int f(x) dx;$$

$$\int f(x) dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b) dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(t) dt, t = g(x)$$