

המכללה האקדמית נתניה

מבחן במתמטיקה א' מועד ב-בנקאות ושוק ההון

שם המרצה:

תאריך הבחינה: יום ה, יח אדר התש"ע 4-3-2010

משך הבחינה: שעתיים וחצי

חומר עזר: מחשבון (לא גרפי).

חלק א' ייבדק רק לפי התשובות הסופיות שיופיעו על טופס הבחינה. חלק ב' ייבדק לפי המחברת.

חלק א.

1. חשב שניים משלושת הגבולות הבאים:
(20%)

א: $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{3}{1-x^3} \right)$

א. $\frac{1}{2}$

ב. 0

ג. $-\frac{1}{2}$

ד. 1

ה. אף אחת מהתשובות האחרות איננה נכונה.

ב: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 4\sqrt{x} + 5}{x^2 - 7\sqrt{x} - 2} \right)^{x\sqrt{x}}$

א. 1

ב. e^{-3}

ג. e^3

ד. e

ה. אף אחת מהתשובות האחרות איננה נכונה.

ג: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{9x^2 - 3x} - \sqrt{9x^2 - 5x + 4}}$

א. 1

- ב. -3
- ג. 3
- ד. 0

ה. אף אחת מהתשובות האחרות איננה נכונה.

2. מצא את הפונקציה ההפוכה לפונקציה (10%) $f(x) = \frac{5-4x}{9+14x} + \frac{2}{7}$

3. גזור את הפונקציה הבאה וצמצם במידת האפשר: (10%)

$$f(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{x^3+4}{x^2+4}\right)}$$

$$f'(x) =$$

4. נתונות הפונקציות: (10%) $g(x) = \frac{e^{-x^2}}{3x+6}$ ו $f(x) = \sqrt{\frac{15 \ln x}{x^3+2x}}$
 חשב את: $f(g(x))$ ואת $g(g(x))$

$$f(g(x)) =$$

5. על כל אחת מהשאלות הבאות יש לענות רק "כן" או "לא". משקל של כל אחת מהשאלות שווה ל 3 נקודות.

א: הפונקציה $f(x) = \sqrt{2x^2 - 7x + 13} + \sqrt{2x^2 + 7x + 13}$ היא פונקציה זוגית.

כן	לא

ב: הפונקציה $f(x) = \frac{x^3 - x}{7}$ היא חד-חד-ערכית

כן	לא

ג. הפונקציה $y = \frac{2x-5}{7|x-1|}$ היא פונקציה רציונאלית.

כן	לא

חלק ב'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על כל אחת מהשאלות הבאות:

6. עבור אילו ערכי a ו b הפונקציה הבאה תהיה רציפה לכל x . (15%)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + 12x + 18}{(x+3)} + 2a & x > -3 \\ 8 & x = -3 \\ \frac{b+7}{a + e^{\frac{7}{x+3}}} & x < -3 \end{cases}$$

7. מיינ את נקודות אי הרציפות של הפונקציה הבאה: (15%)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+7}-3}{2-\sqrt{3x-2}} & x > 2 \\ 1 & x = 2 \\ \frac{x+2}{x^2 + e^{\frac{3}{(x-2)^5}}} & x < 2 \end{cases}$$

8. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^4}{e^x}$ (15%)

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה
- ב. חיתוך עם הצירים

- ג. תחומי עלייה וירידה
- ד. נקודות קיצון
- ה. תחומי קמירות וקעירות
- ו. נקודות פיתול
- ז. זוגיות/איזוגיות הפונקציה

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b), (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2), a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2 + bx + c = 0$ (הוא $a \neq 0$) הוא $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$a^x a^y = a^{x+y}, (ab)^x = a^x b^x, \sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}, \sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}},$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \frac{b^x}{a^x}, a^0 = 1,$$

$$(a^x)^y = a^{xy}, a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $0 < a, a \neq 1$ ו- $x > 0$.

$$\begin{aligned} \log_a(x \cdot y) &= \log_a x + \log_a y, & \log_a x^y &= y \cdot \log_a x; \\ \log_a(x/y) &= \log_a x - \log_a y, & \log_a \sqrt[y]{x} &= \frac{1}{y} \cdot \log_a x; \\ \log_a x &= \frac{\log_b x}{\log_b a}, & \log_a x &= \frac{1}{\log_x a}; \\ a^{\log_a x} &= x, & \ln x &= \log_e x, e = 2.718281828... \\ \ln x = a &\Rightarrow x = e^a \end{aligned}$$

5. הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\begin{aligned} \sin x &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), & \sin^2 x + \cos^2 x &= 1; \\ \tan x &= \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), & \tan x \cdot \cot x &= 1; \\ \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x}, & \cot x &= \frac{\cos x}{\sin x}; \\ 1 + \tan^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x}, & 1 + \cot^2 x &= \frac{1}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

6. הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0 : $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

7. נגזרות בסיסיות.

$$\begin{aligned} (x^a)' &= ax^{a-1}, & (a^x)' &= \ln a \cdot a^x; \\ (\sin x)' &= \cos x, & (e^x)' &= e^x; \\ (\cos x)' &= -\sin x, & (\log_a x)' &= \frac{1}{x \cdot \ln a}; \\ (\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, & (\cot x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x}; \\ (\ln x)' &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

8. כללי גזירה

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x);$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

$$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

9. אינטגרלים מיידיים

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C;$$

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, a \neq -1;$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C;$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

10. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx;$$

$$\int af(x) dx = a \int f(x) dx;$$

$$\int f(x) dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b) dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

תשובות לשאלות

תשובה 1 א

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{3}{1-x^3} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} + \frac{3}{1-x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2+x+1}{x^3-1} + \frac{3}{1-x^3} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2+x+1}{x^3-1} + \frac{-3}{x^3-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2+x+1-3}{x^3-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2+x-2}{x^3-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+2}{x^2+x+1} \right) = 1. \end{aligned}$$

תשובה 1 ב

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 4\sqrt{x} + 5}{x^2 - 7\sqrt{x} - 2} \right)^{x\sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 7\sqrt{x} - 2 + 3\sqrt{x} + 7}{x^2 - 7\sqrt{x} - 2} \right)^{x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3\sqrt{x} + 7}{x^2 - 7\sqrt{x} - 2} \right)^{x\sqrt{x}} = e^L. \\ L &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3\sqrt{x} + 7}{x^2 - 7\sqrt{x} - 2} \right) x\sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 7x\sqrt{x}}{x^2 - 7\sqrt{x} - 2} \right) = 3. \end{aligned}$$

תשובה 1-ג

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{9x^2 - 3x} - \sqrt{9x^2 - 5x + 4}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{9x^2 - 3x} - \sqrt{9x^2 - 5x + 4}} \cdot \frac{\sqrt{9x^2 - 3x} + \sqrt{9x^2 - 5x + 4}}{\sqrt{9x^2 - 3x} + \sqrt{9x^2 - 5x + 4}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 3x} + \sqrt{9x^2 - 5x + 4}}{(9x^2 - 3x) - (9x^2 - 5x + 4)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 3x} + \sqrt{9x^2 - 5x + 4}}{2x - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{9x^2 - 3x}{x^2}} + \sqrt{\frac{9x^2 - 5x + 4}{x^2}}}{2 - 4/x} = \\ &= \frac{3+3}{2} = 3. \end{aligned}$$

תשובה 2

$$\begin{aligned} y = f(x) = \frac{5-4x}{9+14x} + \frac{2}{7} \rightarrow y - \frac{2}{7} = \frac{5-4x}{9+14x} \rightarrow (y - \frac{2}{7})(9+14x) = 5-4x \rightarrow 9y + 14xy - 4x - \frac{18}{7} = 5-4x \rightarrow \\ \rightarrow 9y + 14xy - \frac{18}{7} = 5 \rightarrow 14xy = 5 + \frac{18}{7} - 9y = \frac{53}{7} - 9y = \frac{53-63y}{7} \rightarrow x = \frac{53-63y}{98y}, f^{-1}(x) = \frac{53-63x}{98x}. \end{aligned}$$

תשובה 3

$$\begin{aligned} f(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{x^3+4}{x^2+4}\right)} = \sqrt{\ln(x^3+4) - \ln(x^2+4)} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln(x^3+4) - \ln(x^2+4)}} [\ln(x^3+4) - \ln(x^2+4)]' = \\ = \frac{1}{2\sqrt{\ln(x^3+4) - \ln(x^2+4)}} \left[\frac{3x^2}{x^3+4} - \frac{2x}{x^2+4} \right]. \end{aligned}$$

תשובה 4

(10%) $\cdot g(x) = \frac{e^{-x^2}}{3x+6}$ ו $f(x) = \sqrt{\frac{15 \ln x}{x^3+2x}}$: נתונות הפונקציות:

$\cdot g(g(x))$ ואת $f(g(x))$: חשב את:

$$f(g(x)) = \sqrt{\frac{15 \ln(g(x))}{[g(x)]^3 + 2g(x)}} = \sqrt{\frac{15 \ln\left(\frac{e^{-x^2}}{3x+6}\right)}{\left[\frac{e^{-x^2}}{3x+6}\right]^3 + 2 \frac{e^{-x^2}}{3x+6}}}$$

$$g(g(x)) = \frac{e^{-g(x)^2}}{3g(x)+6} = \frac{e^{-\left(\frac{e^{-x^2}}{3x+6}\right)^2}}{3\left(\frac{e^{-x^2}}{3x+6}\right)+6}$$

תשובה 5 א

נביט על ת"ה של f . $f(x) = \sqrt{2x^2 - 7x + 13} + \sqrt{2x^2 + 7x + 13}$. אז מתקיים כי

$\Delta = 49 - 104 < 0$, ולכן f מוגדרת על \mathbb{R} , ותחום ההגדרה אכן סימטרי. נביט על התנאי הנוסף:

$$f(-x) = \sqrt{2(-x)^2 - 7(-x) + 13} + \sqrt{2(-x)^2 + 7(-x) + 13} = \sqrt{2x^2 + 7x + 13} + \sqrt{2x^2 - 7x + 13} = f(x).$$

לכן f היא פונקציה זוגית.

תשובה 5-ב

$$\frac{a^3 - a}{7} = \frac{b^3 - b}{7} \rightarrow a^3 - a = b^3 - b \rightarrow a^3 - b^3 - a + b = 0 \rightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2) - (a-b) = 0 \rightarrow$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2 - 1) = 0 \rightarrow a^2 + ab + b^2 - 1 = 0 \rightarrow a = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot 1 \cdot (b^2 - 1)}}{2} = \frac{-b \pm \sqrt{4 - 3b^2}}{2}.$$

$$f(0) = f(1) = 7, 0 \neq 1.$$

דרך אחרת:

תשובה 5-ג

$$y = \frac{2x-5}{7|x-1|}$$

המונה הוא פולינום אבל המכנה איננו פולינום, לכן אין זו פונקציה רציונלית.

תשובה 6.

הנקודה הבעייתית היחידה היא $x = -3$, ושם מתקיים.

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{2x^2 + 12x + 18}{(x+3)} + 2a = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2(x^2 + 6x + 9)}{(x+3)} + 2a = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2(x+3)^2}{(x+3)} + 2a = \lim_{x \rightarrow -3} 2(x+3) + 2a = 2a.$$

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{b+7}{a + e^{\frac{7}{x+3}}} = \frac{b+7}{a + e^{\frac{7}{0^-}}} = \frac{b+7}{a + e^{-\infty}} = \frac{b+7}{a+0} = \frac{b+7}{a}.$$

ולכן:

$$\frac{b+7}{a} = 8 = 2a \rightarrow a = 4, b = 25.$$

תשובה 7.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{2 - \sqrt{3x-2}} & x > 2 \\ 1 & x = 2 \\ \frac{x+2}{x^2 + e^{\frac{3}{(x-2)^5}}} & x < 2 \end{cases}$$

רואים כי $x=2$ בעייתית. הנקודה היחידה המאפסת מכנים בכל ההגדרות של הפונקציה

היא $x=2$. לכן נותר לחשב שני גבולות חד צדדיים.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x+7}-3}{2-\sqrt{3x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x+7}-3}{2-\sqrt{3x-2}} \cdot \frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}+3} \cdot \frac{2+\sqrt{3x-2}}{2+\sqrt{3x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+7-9}{4-3x+2} \cdot \frac{2+\sqrt{3x-2}}{\sqrt{x+7}+3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{6-3x} \cdot \frac{2+\sqrt{3x-2}}{\sqrt{x+7}+3} = \frac{-1 \cdot 4}{3 \cdot 6} = \frac{-2}{9} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{x^2 + e^{\frac{3}{(x-2)^5}}} = \frac{2+2}{4 + e^{\frac{3}{(0^-)^5}}} = \frac{4}{4 + e^{-\infty}} = \frac{4}{4+0} = 1.$$

ולכן $x=2$ היא נקודת קפיצה.

תשובה 8

נביט ב-f. תחום ההגדרה כל \mathbb{R} כי המכנה אינו מתאפס. טווח כרגע כל \mathbb{R} .

חתוך עם הצירים:

$$f(x) = \frac{x^4}{e^x}, y=0 \rightarrow x^4=0 \rightarrow x=0. x=0 \rightarrow y=0. (0,0).$$

זוגיות ואי זוגיות

$$f(-x) = \frac{(-x)^4}{e^{-x}} = x^4 e^x \neq \pm f(x).$$

תחום ההגדרה סימטרי, וכמו כן:

ולכן הפונקציה אינה זוגית ואינה איזוגית אלא כללית.

נגזרות

$$f(x) = \frac{x^4}{e^x} = x^4 e^{-x}. f'(x) = (x^4)' e^{-x} + x^4 (e^{-x})' = 4x^3 e^{-x} - x^4 e^{-x} = (4x^3 - x^4) e^{-x} = x^3(4-x) e^{-x}.$$

$$f'' = (4x^3 - x^4)' e^{-x} + (4x^3 - x^4) (e^{-x})' = (12x^2 - 4x^3) e^{-x} - (4x^3 - x^4) e^{-x} = e^{-x} (12x^2 - 8x^3 + x^4) = x^2 e^{-x} (12 - 8x + x^2) = x^2 e^{-x} (x-2)(x-6).$$

ולכן נקבל טבלה בת 4 נקודות מיוחדות $x=0,2,4,6$.

x	קטע	X=0	קטע	X=2	קטע	X=4	קטע	x=6	קטע
y		Y=0		$16/e^2$		$64/e^4$		$36/e^6$	
סימן f'	-		+		+		-		-
סימן f''	+		+		-		-		+
ל-f יש	↪	מינ מקומי ומוחלט חתוך צירים	↩	פתול	↗	מקס מקומי	↘	פתול	↪

טווח $0 \leq y$.