המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

מבחן סופי במתמטיקה א לתלמידי כתת בטוח

יום ו, ה אדר התשע, 19-2-2010

משך המבחן שעתיים וחצי. המבחן ללא חומר עזר, למעט דפי הנוסחאות המצורפים. מותר להשתמש במחשבונים.

במבחן 10 שאלות. משקל כל שאלה משאלות 1-9 הוא 10 נקודות. משקל שאלה 10 הוא 30 נקודות. סה"כ יש במבחן 120 נקודות.

עליך לצבור 100 נקודות לפי בחירתך.

אם תענה על יותר מ-100 נקודות יחושב לך הממוצע של כמה נקודות שקבלת מתוך כמה שניסית.

עבור שאלות 1-8, כתוב את כל התשובות הסופיות בדף השאלון. מתחת או ליד כל שאלה יש מקום לכתיבת התשובה הסופית. התשובות לשאלות אלו במחברות לא תבדקנה.

לחלק מהשאלות 1-8 יש מקום בגוף השאלון, בנוסף לתשובה הסופית, לפרוט של הדרך שבה השתמשת. תשובות לשאלות אלו יכולות להוסיף נקוד חלקי <u>במקרה ונפלה שגיאה בתשובה הסופית</u>.

שאלות 9,10 תפתרנה במחברת.

<u>בהצלחה</u>

עמותה רשומה 580242451 **Fax:** (972-9) 8844439 **פקס:** **Tel:** (972-9) 8607777 **טל:**

1. נתונות $f(x)=\frac{2}{\sqrt[3]{x}}, g(x)=\ln(1+x^2)$. חשב את הפונקציות המורכבות הבאות:
$f \circ f, f \circ g, g \circ f, g \circ g$. אין צורך לפשט אלגברית, מספיק להציב.

תשובות

$f \circ f =$

$f \circ g =$

$g \circ f =$

$g \circ g =$

2.

מצא הפוכה לפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$

פתרון:

3. חשב את הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+4^x}{x^2+2^{2x}})$.

פתרון

נקוד חלקי: השיטות שבהן חשבתי את הגבול הן:

4. חשב את הגבול $\lim\limits_{x\to 3}(\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{2x+3}}{\sqrt{x^2-5}-\sqrt{x+1}})$.

פתרון

נקוד חלקי: השיטות שבהן חשבתי את הגבול הן:

5. חשב את הגבול $\lim\limits_{x\to 5}(\frac{x^2+2}{x^2+x-3})^{\frac{3}{(x-5)}}$.

פתרון

נקוד חלקי: השיטות שבהן חשבתי את הגבול הן:

6. על כל אחת מהסעיפים הבאים יש לענות רק **"כן"** או **"לא"**. משקל של כל אחד מהסעיפים **שווה ל 3 נקודות.**

א: הפונקציה $y=\sqrt[3]{x^2}$ היא פונקציה אי-זוגית. כן לא

ב: הפונקציה $y=\dfrac{2}{(5-x)^2}$ היא חד-חד-ערכית כן לא

ג. הפונקציה $y=\dfrac{e}{x+\sqrt{3}}$ היא פונקציה רציונאלית. כן לא

7. גזור את הפונקציה $f(x)=\sqrt{5+\ln(3-x)}$.

הנגזרת היא:

חוקי הגזירה בהם השתמשתי לחשוב הנגזרת הם:

8. גזור את הפונקציה $f(x)=\dfrac{xe^{-4x}}{\sqrt{x^2+1}}$

הנגזרת היא:

חוקי הגזירה בהם השתמשתי לחשוב הנגזרת הם:

9. עבור אילו ערכי a ו- b הפונקציה הבאה תהיה רציפה לכל x .

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{ax^2+bx+16}-4}{x} & x>0\\ 7 & x=0\\ \dfrac{5b}{a+e^{-\frac{4}{x}}} & x<0\end{cases}$$

<u>פתרון במחברת</u>

10. (30 נקודות) חקור (חקירה חלקית) את הפונקציה הבאה: $f(x)=x^4-8x^2+16$

הנקודות לבדיקה: תחום, טווח, זוגיות ואי זוגיות, נקודות חתוך עם הצירים, קטעי עליה וירידה, קטעי קמירות וקעירות, נקודות קיצון מקומיות ונקודות פתול.

<u>פתרון במחברת</u>

תשובות לשאלות:

תשובה לשאלה 1:

$$(f\circ f)(x)=\frac{2}{\sqrt[3]{f(x)}}=\frac{2}{\sqrt[3]{2/\sqrt[3]{x}}}=\frac{2}{\sqrt[3]{2}/\sqrt[9]{x}}=\frac{2\sqrt[9]{x}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{(\sqrt[3]{2})^3\sqrt[9]{x}}{\sqrt[3]{2}}=(\sqrt[3]{2})^2\sqrt[9]{x}$$

$$(f\circ g)(x)=\frac{2}{\sqrt[3]{g(x)}}=\frac{2}{\sqrt[3]{\ln(1+x^2)}}$$

$$(g\circ f)(x)=\ln(1+f(x)^2)=\ln(1+(\frac{2}{\sqrt[3]{x}})^2)=\ln(1+\frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}).$$

$$(g\circ g)(x)=\ln(1+g(x)^2)=\ln(1+[\ln(1+x^2)]^2)$$

תשובה לשאלה 2 $y=\frac{1}{x^2-1}\to x^2-1=\frac{1}{y}\to x^2=1+\frac{1}{y}\to f^{-1}(x)=\sqrt{1+\frac{1}{x}}$

תשובה לשאלה 3 בתרגיל זה מחלקים בחזקה הגבוהה ביותר שהיא $4^x=2^{2x}$ ומקבלים

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x+4^x}{x^2+2^{2x}})=\lim_{x\to\infty}(\frac{(x/4^x)+1}{(x^2/2^{2x})+1})=\frac{0+1}{0+1}=1.$$

תשובה לשאלה 4 בתרגיל כופלים ומחלקים בשני צמודים, גם של המונה וגם של המכנה:

$$\lim_{x\to3}(\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{2x+3}}{\sqrt{x^2-5}-\sqrt{x+1}})=\frac{0}{0}=\lim_{x\to3}(\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{2x+3}}{\sqrt{x^2-5}-\sqrt{x+1}}\frac{\sqrt{x+6}+\sqrt{2x+3}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{2x+3}}\frac{\sqrt{x^2-5}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-5}+\sqrt{x+1}})=$$

$$=\lim_{x\to3}(\frac{(x+6)-(2x+3)}{(x^2-5)-(x+1)}\frac{\sqrt{x^2-5}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{2x+3}})=\lim_{x\to3}(\frac{3-x}{x^2-x-6}\frac{\sqrt{x^2-5}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{2x+3}})=$$

$$=\lim_{x\to3}(\frac{3-x}{(x-3)(x+2)}\frac{\sqrt{x^2-5}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{2x+3}})=\lim_{x\to3}(\frac{-1}{(x+2)}\frac{\sqrt{x^2-5}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{2x+3}})=\frac{-1(2+2)}{5(3+3)}=\frac{-4}{30}=\frac{-2}{15}.$$

.

תשובה לשאלה 5 בתרגיל זה משתמשים בטריק של אוילר:

$$\lim_{x\to5}(\frac{x^2+2}{x^2+x-3})^{\frac{3}{(x-5)}}=(\frac{27}{27})^{\pm\infty}=1^{\pm\infty}=\lim_{x\to5}(\frac{x^2+x-3-x+5}{x^2+x-3})^{\frac{3}{(x-5)}}=\lim_{x\to5}(1+\frac{-x+5}{x^2+x-3})^{\frac{3}{(x-5)}}=e^L.$$

$$L=\lim_{x\to5}\frac{-x+5}{x^2+x-3}\frac{3}{(x-5)}=\lim_{x\to5}\frac{-3}{x^2+x-3}=\frac{-3}{27}=\frac{-1}{9}$$

תשובה לשאלה 6.

א. לא כי $y(-1)=\sqrt[3]{(-1)^2}=\sqrt[3]{1}=1=\sqrt[3]{1^2}=y(1)$

ב. לא כי $y(4)=\frac{2}{(5-4)^2}=\frac{2}{1}=2, y(6)=\frac{2}{(5-6)^2}=\frac{2}{(-1)^2}=2, 4\neq 6.$

ג. כן,המונה e הוא פולינום ממעלה 0, המכנה הוא פולינום ממעלה 1, מותר לפולינומים להכיל קבועים אירציונליים.

תשובה לשאלה 7 $f(x)=\sqrt{5+\ln(3-x)}$

הנגזרת היא.

$$f(x)=\sqrt{5+\ln(3-x)}\; f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{5+\ln(3-x)}}(0+\frac{1}{3-x}\cdot(-1))=\frac{-1}{2\sqrt{5+\ln(3-x)}(3-x)}$$

הנוסחאות שבהן השתמשנו : כלל השרשרת (שלוש פעמים).

תשובה לשאלה 8 $f(x)=\frac{xe^{-4x}}{\sqrt{x^2+1}}$

הנגזרת:

$$f'(x)=\frac{(xe^{-4x})'\sqrt{x^2+1}-xe^{-4x}(\sqrt{x^2+1})'}{x^2+1}=\frac{[x'e^{-4x}+x(e^{-4x})']\sqrt{x^2+1}-xe^{-4x}(\sqrt{x^2+1})'}{x^2+1}=$$

$$=\frac{[e^{-4x}+x(e^{-4x})(-4)]\sqrt{x^2+1}-xe^{-4x}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{\frac{e^{-4x}}{\sqrt{x^2+1}}[1-4x](x^2+1)-x^2}{x^2+1}=\frac{e^{-4x}\{[1-4x](x^2+1)-x^2\}}{(\sqrt{x^2+1})^3}=$$

$$=\frac{e^{-4x}(-4x^3-4x+1)}{(\sqrt{x^2+1})^3}.$$

הנוסחאות שבהן השתמשנו : כלל המנה, כלל המכפלה וכלל השרשרת פעמיים.

תשובה לשאלה 9

השיטות לפתרון הגבול מימין: כפל וחלוקה בצמוד

השיטות לפתרון הגבול מימין: 1/(0-)=-∞

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{ax^2+bx+16}-4}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{ax^2+bx+16}-4}{x}\frac{\sqrt{ax^2+bx+16}+4}{\sqrt{ax^2+bx+16}+4}=\lim_{x\to 0+}\frac{ax^2+bx+16-16}{x(\sqrt{ax^2+bx+16}+4)}=$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{ax^2+bx}{x(\sqrt{ax^2+bx+16}+4)}=\lim_{x\to 0+}\frac{ax+b}{(\sqrt{ax^2+bx+16}+4)}=\frac{b}{8}.$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{5b}{a+e^{-\frac{4}{x}}}=\frac{5b}{a+e^{\frac{4}{0-}}}=\frac{5b}{a+e^{-\infty}}=\frac{5b}{a+0}=\frac{5b}{a}.\to\frac{5b}{a}=\frac{b}{8}=7\to b=56, a=40.$$

תשובה לשאלה 10

תחום הגדרה: R

זוגיות: תחום ההגדרה סימטרי. כמו כן

$$f(-x)=(-x)^4-8(-x)^2+16=x^4-8x^2+16=f(x)$$

לכן הפונקציה זוגית.

נקודות חתוך עם הצירים: אם $x=0$ אז $y=16$, עבור $y=0$ נסמן $z=x^2$ ונפתר משואה רבועית ונקבל $z=4$, ולכן $x=2,-2$.

נגזרת ראשונה $4x^3-16x=4x(x^2-4)=4x(x-2)(x+2)$

נגזרת שניה $12x^2-16=4(3x^2-4)=4(\sqrt{3}x-2)(\sqrt{3}x+2).$

נקודות מיוחדות $0,2,-2,2/\sqrt{3},-2/\sqrt{3}$

ולכן יש 5 נקודות התאפסות לנגזרות ומוגדרים ששה קטעים. נבחר נציג לכל קטע ונציב בנגזרות ונקבל את הטבלה הבאה:

x	קטע	-2	קטע	-2/√3	קטע	0	קטע	2/√3	קטע	2	קטע
y		0		64/9		16		64/9		0	
סימן f’	-		+		+		-		-		+
סימן f’’	+		+		-		-		+		+
ל-f יש	↳	מינ מוח	↱	פתול	↗	מקס מקומ	↴	פתול	↳	מינ מוח	↱

טווח: $[0,\infty)$

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\quad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=0$ $\left(a\neq 0\right)$ הוא $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$a^xa^y=a^{x+y},(ab)^x=a^xb^x,\sqrt[x]{a}=a^{\frac{1}{x}},\sqrt[x]{a^y}=a^{\frac{y}{x}},$$
$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x},\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}=\frac{b^x}{a^x},a^0=1,$$
$$\left(a^x\right)^y=a^{xy},a^{-x}=\frac{1}{a^x},\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x=y\Leftrightarrow a^y=x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x>0$ ו $0<a,a\neq 1$.

$$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y,\qquad \log_a x^y=y\cdot\log_a x;$$
$$\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y,\qquad \log_a\sqrt[y]{x}=\tfrac{1}{y}\cdot\log_a x;$$
$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a},\qquad \log_a x=\frac{1}{\log_x a};$$
$$a^{\log_a x}=x,\qquad \ln x=\log_e x,e=2.718281828...$$
$$\ln x=a\Rightarrow x=e^a$$

5. הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \tan x \cdot \cot x = 1;$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

6.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

7. נגזרות בסיסיות.

$$\left(x^a\right)' = ax^{a-1}, \qquad (a^x)' = \ln a \cdot a^x;$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (e^x)' = e^x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

8. כללי גזירה

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x);$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

$$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

9. אינטגרלים מיידים

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C;$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$
$$\int e^x dx = e^x + C;$$
$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C;$$
$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, a \neq -1;$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C;$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

10. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$
$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$
$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$