



מבחן סופי במתמטיקה א לתלמידי כתיבת בטוח

מועד ב יום ו, י"א ניסן התש"ע, 26-3-2010

משך המבחן שעתיים וחצי. המבחן ללא חומר עזר, למעט דפי הנוסחאות המצורפים. מותר להשתמש במחשבוני.

במבחן 10 שאלות. משקל כל שאלה משאלות 1-9 הוא 10 נקודות. משקל שאלה 10 הוא 30 נקודות. סה"כ יש במבחן 120 נקודות.

עליך לצבור 100 נקודות לפי בחירתך.

אם תענה על יותר מ-100 נקודות יחושב לך הממוצע של הנקודות שקבלת מתוך כמה שניסית.

עבור שאלות 1-8, כתוב את כל התשובות הסופיות בדף השאלון. מתחת או ליד כל שאלה יש מקום לכתוב התשובה הסופית. התשובות לשאלות אלו במחברות לא תבדקנה.

לחלק מהשאלות 1-8 יש מקום בגוף השאלון, בנוסף לתשובה הסופית, לפרוט של הדרך שבה השתמשת. תשובות לשאלות אלו יכולות להוסיף נקודות חלקי במקרה ונפלה שגיאה בתשובה הסופית.

שאלות 9,10 תפתרנה במחברת.

בהצלחה

1. נתונות $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $g(x) = x + \sqrt{x}$. חשב את הפונקציות המורכבות הבאות:
 $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$. אין צורך לפשט אלגברית, מספיק להציב.

תשובות

$$f \circ f =$$

$$f \circ g =$$

$$g \circ f =$$

$$g \circ g =$$

2. מצא הפוכה לפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{5}{x^3 + 2}$

פתרון:

3. חשב את הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x}{\sqrt{x^3+1}} \right)$.

פתרון

נקוד חלקי: השיטות שבהן חשבתי את הגבול הן:

4. חשב את הגבול $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{\sqrt{x^2+9} - \sqrt{5x+5}}{\sqrt{x^2-7} - \sqrt{2x+1}} \right)$.

פתרון

נקוד חלקי: השיטות שבהן חשבתי את הגבול הן:

5. חשב את הגבול $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2+2}{x^2+x} \right)^{\frac{7}{x-2}}$.

פתרון

נקוד חלקי: השיטות שבהן חשבתי את הגבול הן:

6. על כל אחת מהסעיפים הבאים יש לענות רק "כן" או "לא". משקל של כל אחד

מהסעיפים שווה ל 3 נקודות.

א: הגבול הבא נכון $\lim_{x \rightarrow \infty} 3^x = \infty$. כן לא

ב: פונקציה חד-חד-ערכית היא גם מונוטונית כן לא

ג. הפונקציה $y = \frac{2}{x + \sqrt{5}}$ היא פונקציה רציונאלית. כן לא

7. גזור את הפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{x + e^{2x}}$.

הנגזרת היא:

חוקי הגזירה בהם השתמשתי לחשוב הנגזרת הם:

8. גזור את הפונקציה $f(x) = \frac{xe^{5x}}{\sqrt{x^3 + 2}}$.

הנגזרת היא:

חוקי הגזירה בהם השתמשתי לחשוב הנגזרת הם:

9. עבור אילו ערכי a ו- b הפונקציה הבאה תהיה רציפה לכל x .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{bx^2 + ax + 25} - 5}{x} & x > 0 \\ 2 & x = 0 \\ \frac{b}{a + e^{\frac{4}{x}}} & x < 0 \end{cases}$$

פתרון במחברת

10. (30 נקודות) חקור (חקירה חלקית) את הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x^4}{e^x}$.

הנקודות לבדיקה: תחום, טווח, זוגיות ואי זוגיות, נקודות חתוך עם הצירים, קטעי עליה וירידה, קטעי קמירות וקעירות, נקודות קיצון מקומיות ונקודות פתול.

פתרון במחברת

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b), \quad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2), \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2 + bx + c = 0$ (א $\neq 0$) הוא $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ב. פירוק הטרינום $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

3. חזקות ושורשים

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad (ab)^x = a^x b^x, \quad \sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}, \quad \sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}},$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \frac{b^x}{a^x}, \quad a^0 = 1,$$

$$(a^x)^y = a^{xy}, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \quad \sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x > 0$ ו- $0 < a, a \neq 1$.

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a x^y = y \cdot \log_a x;$$

$$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y, \quad \log_a \sqrt[y]{x} = \frac{1}{y} \cdot \log_a x;$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad \log_a x = \frac{1}{\log_x a};$$

$$a^{\log_a x} = x, \quad \ln x = \log_e x, e = 2.718281828\dots$$

$$\ln x = a \Rightarrow x = e^a$$

5. הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \tan x \cdot \cot x = 1;$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

6. הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0 : $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

7. נגזרות בסיסיות.

$$\begin{aligned}
(x^a)' &= ax^{a-1}, & (a^x)' &= \ln a \cdot a^x; \\
(\sin x)' &= \cos x, & (e^x)' &= e^x; \\
(\cos x)' &= -\sin x, & (\log_a x)' &= \frac{1}{x \cdot \ln a}; \\
(\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, & (\cot x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x}; \\
(\ln x)' &= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

8. כללי גזירה

$$\begin{aligned}
(a \cdot f(x))' &= a \cdot f'(x); \\
(f(x) \pm g(x))' &= f'(x) \pm g'(x); \\
(f(x)g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x); \\
(f(x)g(x)h(x))' &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x) \\
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}; \\
(f(g(x)))' &= f'(g(x)) \cdot g'(x)
\end{aligned}$$

9. אינטגרלים מיידיים

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x} dx &= \ln |x| + C; \\
\int \cos x dx &= \sin x + C; \\
\int \sin x dx &= -\cos x + C; \\
\int e^x dx &= e^x + C; \\
\int a^x dx &= \frac{1}{\ln a} a^x + C; \\
\int x^a dx &= \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, a \neq -1; \\
\int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x + C; \\
\int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\cot x + C
\end{aligned}$$

10. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx;$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

תשובות לשאלות:

תשובה לשאלה 1:

$$(f \circ f)(x) = \sqrt{f(x)^2 + 1} = \sqrt{(\sqrt{x^2 + 1})^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 2}.$$

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{g(x)^2 + 1} = \sqrt{(x + \sqrt{x})^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 2x\sqrt{x} + x + 1}.$$

$$(g \circ f)(x) = f(x) + \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[4]{x^2 + 1}.$$

$$(g \circ g)(x) = g(x) + \sqrt{g(x)} = x + \sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{x}}$$

$$y = \frac{5}{x^3 + 2} \rightarrow x^3 + 2 = \frac{5}{y} \rightarrow x^3 = \frac{5}{y} - 2 \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{5}{x} - 2} = \sqrt[3]{\frac{5-2x}{x}}. \quad 2 \text{ תשובה לשאלה}$$

תשובה לשאלה 3 בתרגיל זה מחלקים בחזקה הגבוהה ביותר שהיא $x^{3/2}$ ומקבלים

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x}{\sqrt{x^3 + 1}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x/x^{3/2}}{\sqrt{x^3 + 1}/\sqrt{x^3}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5/\sqrt{x}}{\sqrt{1 + 1/x^3}} \right) = \frac{5/\infty}{\sqrt{1 + 1/\infty}} = \frac{0}{\sqrt{1 + 0}} = 0.$$

תשובה לשאלה 4 בתרגיל כופלים ומחלקים בשני צמודים, גם של המונה וגם של המכנה:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 9} - \sqrt{5x + 5}}{\sqrt{x^2 - 7} - \sqrt{2x + 1}} \right) &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 9} - \sqrt{5x + 5}}{\sqrt{x^2 - 7} - \sqrt{2x + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{5x + 5}}{\sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{5x + 5}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 7} + \sqrt{2x + 1}}{\sqrt{x^2 - 7} + \sqrt{2x + 1}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{(x^2 + 9) - (5x + 5)}{(x^2 - 7) - (2x + 1)} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 7} + \sqrt{2x + 1}}{\sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{5x + 5}} \right) = \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 2x - 8} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 7} + \sqrt{2x + 1}}{\sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{5x + 5}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{(x-1)(x-4)}{(x+2)(x-4)} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 7} + \sqrt{2x + 1}}{\sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{5x + 5}} \right) = \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{(x-1)}{(x+2)} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 7} + \sqrt{2x + 1}}{\sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{5x + 5}} \right) = \frac{3(3+3)}{6(5+5)} = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

תשובה לשאלה 5 בתרגיל זה משתמשים בטריק של אוילר:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 + x} \right)^{\frac{7}{x-2}} &= \left(\frac{6}{6} \right)^{\pm\infty} = 1^{\pm\infty} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 + x + 2 - x}{x^2 + x} \right)^{\frac{7}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(1 + \frac{2-x}{x^2 + x} \right)^{\frac{7}{x-2}} = e^L. \\ L &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{x^2 + x} \cdot \frac{7}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-7}{x^2 + x} = \frac{-7}{6}. \end{aligned}$$

תשובה לשאלה 6.

א. כן כיון ש $\lim_{x \rightarrow \infty} 3^x = \infty$ כי $a^\infty = \infty, a > 1$.

ב. כן כיון ש $a < b \rightarrow f(a) < f(b)$.

ג. כן כיון שהמונה הוא פולינום ממעלה 0, המכנה הוא פולינום ממעלה 1, מותר לפולינומים להכיל קבועים אירציונליים.

תשובה לשאלה 7

$$f(x) = \sqrt[3]{x + e^{2x}}. f'(x) = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x + e^{2x}})^2} (1 + e^{2x} \cdot 2) = \frac{1 + 2e^{2x}}{3(\sqrt[3]{x + e^{2x}})^2}. \quad \text{הנגזרת היא.}$$

הנוסחאות שבהן השתמשנו : כלל השרשרת (פעמיים).

$$f(x) = \frac{xe^{5x}}{\sqrt{x^3+2}} \quad \text{תשובה לשאלה 8}$$

הנגזרת:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{xe^{5x}}{\sqrt{x^3+2}} \quad f'(x) = \frac{(xe^{5x})' \sqrt{x^3+2} - xe^{5x} (\sqrt{x^3+2})'}{x^3+2} = \frac{[x'e^{5x} + x(e^{5x})'] \sqrt{x^3+2} - xe^{5x} (\sqrt{x^3+2})'}{x^3+2} = \\ &= \frac{[e^{5x} + x(e^{5x})'(5)] \sqrt{x^3+2} - xe^{5x} \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+2}}}{x^3+2} = \frac{e^{5x} [2(1+5x)(x^3+2) - 3x^3]}{2(\sqrt{x^3+2})^3} = \\ &= \frac{e^{5x}(10x^4 - x^3 + 20x + 4)}{2(\sqrt{x^3+2})^3}. \end{aligned}$$

הנוסחאות שבהן השתמשנו : כלל המנה, כלל המכפלה וכלל השרשרת פעמיים.

תשובה לשאלה 9

השיטות לפתרון הגבול מימין: כפל וחלוקה בצמוד

השיטות לפתרון הגבול משמאל: $1/(0^-) = -\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{bx^2+ax+25}-5}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{bx^2+ax+25}-5}{x} \cdot \frac{\sqrt{bx^2+ax+25}+5}{\sqrt{bx^2+ax+25}+5} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{bx^2+ax+25-25}{x(\sqrt{bx^2+ax+25}+5)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{bx^2+ax}{x(\sqrt{bx^2+ax+25}+5)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{bx+a}{(\sqrt{bx^2+ax+25}+5)} = \frac{a}{10}. \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{b}{a+e^{\frac{4}{x}}} &= \frac{b}{a+e^{-\infty}} = \frac{b}{a+0} = \frac{b}{a} \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{a}{10} = 2 \rightarrow b = 40, a = 20. \end{aligned}$$

תשובה לשאלה 10

נביט ב-f. תחום ההגדרה כל R כי המכנה אינו מתאפס. טווח כרגע כל R.

חתוך עם הצירים:

$$f(x) = \frac{x^4}{e^x}, y=0 \rightarrow x^4 = 0 \rightarrow x=0. x=0 \rightarrow y=0. (0,0).$$

זוגיות ואי זוגיות

$$f(-x) = \frac{(-x)^4}{e^{-x}} = x^4 e^x \neq \pm f(x).$$

תחום ההגדרה סימטרי, וכמו כן:

ולכן הפונקציה אינה זוגית ואינה איזוגית אלא כללית.

נגזרות

$$f(x) = \frac{x^4}{e^x} = x^4 e^{-x}. f'(x) = (x^4)' e^{-x} + x^4 (e^{-x})' = 4x^3 e^{-x} - x^4 e^{-x} = (4x^3 - x^4) e^{-x} = x^3 (4 - x) e^{-x}.$$

$$f'' = (4x^3 - x^4)' e^{-x} + (4x^3 - x^4) (e^{-x})' = (12x^2 - 4x^3) e^{-x} - (4x^3 - x^4) e^{-x} = e^{-x} (12x^2 - 8x^3 + x^4) = x^2 e^{-x} (12 - 8x + x^2) = x^2 e^{-x} (x-2)(x-6).$$

ולכן נקבל טבלה בת 4 נקודות מיוחדות x=0,2,4,6.

x	קטע	X=0	קטע	X=2	קטע	X=4	קטע	x=6	קטע
y		Y=0		16/e ²		64/e ⁴		36/e ⁶	
סימן	-		+		+		-		-

f'									
סימן f''	+		+		-		-		+
ל- f יש	↪	מינ מקומי ומוחלט חתוך צירים	↩	פתול	↗	מקס מקומי	↖	פתול	↪

טווח $0 \leq y$.