# המכללה האקדמית נתניה

## מבחן במתמטיקה א' -מנהל עסקים

שם המרצה: בלנוב, דולה
תאריך הבחינה:
משך הבחינה: שעתיים וחצי
חומר עזר: מחשבון (לא גרפי).

חלק א' ייבדק רק לפי התשובות הסופיות שיופיעו על טופס הבחינה. חלק ב' ייבדק לפי המחברת.

---

**חלק א.**

1. חשב שניים משלושת הגבולות הבאים: (24%)

א:
$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^4-4x^3+5x^2-6x+3}{-3x^4+6x^3+2x^2-10x+5}$$

**א.** $\frac{-2}{3}$
**ב.** $0$
**ג.** $\frac{5}{2}$
**ד.** $10$
**ה. אף אחת מהתשובות האחרות איננה נכונה.**

ב:
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-11x+13}{3x^2-11x+7}\right)^{5x-2x^2}$$

**א.** $1$
**ב.** $e^{-4}$
**ג.** $e^{3}$
**ד.** $e^{-3}$
**ה. אף אחת מהתשובות האחרות איננה נכונה.**

ג:
$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+3x}}\right)$$

**א.** **2**

**ב. ‎-2**
**ג. 0.5**
**ד. 0**
**ה. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.**

2. חשב שניים משלושת האינטגרלים הבאים: (16%)

א: $\int \frac{x^2-3x-2}{x(x+1)^2}dx=$

ב: $\int (x+1)\cdot \ln x dx=$

ג: $\int (5x^2-10x)\sqrt{x^3-3x^2+5}dx=$

3. ענה על אחד מתוך שני הסעיפים הבאים:
(10%)

א: חשב את השטח החסום על ידי הגרפים של הפונקציות:
$f(x)=x^3+6x^2$ ו $g(x)=x^4-4x^3$ .

השטח הוא:
יש לרשום את הנוסחאות הסופיות
ואת השטח המתקבל:

ב: חשב את נפח גוף הסיבוב המתקבל מסיבוב סביב ציר ה - $x$
של השטח המוגבל בין הגרפים של הפונקציות $y=e^x$ , $y=x\sqrt{x}$ ,
הישר $x=1$ וציר ה- $y$ .

הנפח הוא:
יש לרשום את הנוסחאות הסופיות
ואת השטח המתקבל:

**חלק ב'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על כל אחת מהשאלות הבאות:**

---

4. ענה על אחד משני הסעיפים הבאים:
(20%)

א: עבור אילו ערכי $a$ ו $b$ הפונקציה הבאה תהיה רציפה לכל $x$ .

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{ax^2+bx+4}-2}{x} & x>0\\ 6 & x=0\\ \dfrac{2b}{a+e^{\frac{3}{x}}} & x<0\end{cases}$$

ב: חברה מוכרת כל יום 100 מוצרים במחיר 40 ₪ למוצר.
על כל הורדה של שקל אחד ממחיר המוצר, החברה מוכרת 4 מוצרים יותר ליום.
חשב מה צריך להיות מחיר המוצר כדי שההכנסה היומית תהיה מקסימלית.
רמז: סמן ב -x את מספר המוצרים הנוספים ליום.

5. נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$

(30%)

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

**א: תחום הגדרה**

ב: נקודות חיתוך עם הצירים.
ג: תחומי עליה וירידה.
ד: נקודות קיצון.
ה: נקודות פיתול , תחומי קמירות וקעירות .
ו: זוגיות/ אי- זוגיות הפונקציה.
ז: אסימפטוטות אנכיות ומשופעות.
ח: שרטט את גרף הפונקציה.

בהצלחה!!!

פתרונות

## שאלה 1א

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^4-4x^3+5x^2-6x+3}{-3x^4+6x^3+2x^2-10x+5}=\frac{2-4+5-6+3}{-3+6+2-10+5}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{8x^3-12x^2+10x-6}{-12x^3+18x^2+4x-10}=$$
$$\frac{8-12+10-6}{-12+18+4-10}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{24x^2-24x+10}{-36x^2+36x+4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

## שאלה 1ב

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-11x+13}{3x^2-11x+7}\right)^{5x-2x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-11x+7+6}{3x^2-11x+7}\right)^{5x-2x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{3x^2-11x+7}\right)^{5x-2x^2}$$

פתרון א לפי העובדה כי אם $\lim f(x)=0$ אז $\lim(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}=e$ . נשתמש בזה עבור $f(x)=\frac{6}{3x^2-11x+7}$ ונמשיך:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-11x+13}{3x^2-11x+7}\right)^{5x-2x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{3x^2-11x+7}\right)^{5x-2x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{3x^2-11x+7}\right)^{5x-2x^2\cdot\frac{(3x^2-11x+7)6}{(3x^2-11x+7)6}}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left[(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}\right]^{\frac{6(5x-2x^2)}{(3x^2-11x+7)}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6(5x-2x^2)}{(3x^2-11x+7)}}=e^{-\frac{12}{3}}=e^{-4}$$

פתרון ב

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{3x^2-11x+13}{3x^2-11x+7})^{5x-2x^2}=\lim_{x\to\infty}(\frac{3x^2-11x+7+6}{3x^2-11x+7})^{5x-2x^2}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{6}{3x^2-11x+7})^{5x-2x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{(3x^2-11x+7)/6})^{5x-2x^2}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{(3x^2-11x+7)/6})^{5x-2x^2\cdot\frac{(3x^2-11x+7)/6}{(3x^2-11x+7)/6}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{(3x^2-11x+7)/6})^{(3x^2-11x+7)/6\cdot\frac{5x-2x^2}{(3x^2-11x+7)/6}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{5x-2x^2}{(3x^2-11x+7)/6}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{6(5x-2x^2)}{3x^2-11x+7}}=e^{\frac{-12}{3}}=e^{-4}$$

שאלה 1ג

$$\lim_{x\to\infty}x(\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+3x}})=\lim_{x\to\infty}(\infty(\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}))=\infty\cdot 0=\lim_{x\to\infty}x(\frac{\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2+3x}\sqrt{x^2+x}})=$$

$$=\lim_{x\to\infty}x(\frac{\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2+3x}\sqrt{x^2+x}})\frac{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to\infty}x(\frac{(x^2+3x)-(x^2+x)}{\sqrt{x^2+3x}\sqrt{x^2+x}})\frac{1}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}x(\frac{2x}{\sqrt{x^2+3x}\sqrt{x^2+x}})\frac{1}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{\sqrt{x^2+3x}\sqrt{x^2+x}}\frac{1}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x^2)/x^2}{(\sqrt{x^2+3x}\sqrt{x^2+x})/x^2}\frac{1}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{((\sqrt{x^2+3x})/x)((\sqrt{x^2+x})/x)}\frac{1}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+3/x}\sqrt{1+1/x}}\frac{1}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+x}}=\frac{2}{\sqrt{1+0}\sqrt{1+0}}\frac{1}{\sqrt{\infty}+\sqrt{\infty}}=2\cdot 0=0$$

שאלה 2א

$$\int\frac{x^2-3x-2}{x(x+1)^2}dx=?,\frac{x^2-3x-2}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}\to x^2-3x-2=A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx$$

מציאת C,B,A . דרך ראשונה על ידי פתיחת סוגרים:

$$x^2-3x-2=A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx=A(x^2+2x+1)+B(x^2+x)+Cx=(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A$$
$$\to A=-2,B=3,C=-2$$

מציאת C,B,A . דרך שניה על ידי הצבה:

$$x^2-3x-2=A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx\to$$
$$(x=0)\to A=-2\to(x=-1)\to -C=2\to(x=1)\to 4A+2B+C=-4\to A=C=-2,B=3.$$

בדיקה:

$$-2(x+1)^2+3x(x+1)-2x=-2(x^2+2x+1)+3(x^2+x)-2x=x^2-3x-2$$

סיום התרגיל:

$$\int\frac{x^2-3x-2}{x(x+1)^2}dx=\int(\frac{-2}{x}+\frac{3}{x+1}+\frac{-2}{(x+1)^2})dx=-2\ln(x)+3\ln(x+1)+\frac{2}{x+1}+C$$

שאלה 2ב

$$\int(x+1)\cdot\ln xdx=?,\int f'\cdot gdx=fg-\int fg'dx,\ f'=x+1,g=\ln(x),\ f=(x+1)^2/2,g'=1/x,$$

$$\int(x+1)\cdot\ln xdx=\frac{(x+1)^2\ln(x)}{2}-\int\frac{(x+1)^2}{2x}dx=\frac{(x+1)^2\ln(x)}{2}-\int\frac{x^2+2x+1}{2x}dx=$$

$$=\frac{(x+1)^2\ln(x)}{2}-\int(\frac{x}{2}+1+\frac{1}{2x})dx=\frac{(x+1)^2\ln(x)}{2}-\frac{x^2}{4}-x-\frac{\ln(x)}{2}+C=$$

$$=\frac{[(x+1)^2-1]\ln(x)}{2}-\frac{x^2}{4}-x+C=\frac{[x^2+2x]\ln(x)}{2}-\frac{x^2+4x}{4}+C.$$

שאלה 2ג

$$\int(5x^2-10x)\sqrt{x^3-3x^2+5}dx=?,\int g'(f(x))f'(x)dx=g(f(x))+C,\ f(x)=u=x^3-3x^2+5,$$

$$\frac{du}{dx}=3x^2-6x,du=3(x^2-2x)dx=\frac{3}{5}(5x^2-10x)dx\rightarrow\frac{5du}{3}=(5x^2-10x)dx.$$

$$\int(5x^2-10x)\sqrt{x^3-3x^2+5}dx=\frac{5}{3}\int\sqrt{u}du=\frac{5}{3}\frac{u^{3/2}}{3/2}+C=\frac{10}{9}(\sqrt{x^3-3x^2+5})^3+C$$

שאלה 3א

$$f(x)=g(x)\rightarrow x^3+6x^2=x^4-4x^3\rightarrow x^4-5x^3-6x^2=0\rightarrow x^2(x-6)(x+1)=0\rightarrow$$

$$x=6,x=-1,x=0,\ f(-0.5)=11/8,g(-0.5)=9/16,\ f(1)=7,g(1)=-3.$$

$$S=\int_{-1}^{0}[(x^3+6x^2)-(x^4-4x^3)]dx+\int_{0}^{6}[(x^3+6x^2)-(x^4-4x^3)]dx=$$

.

$$=\int_{-1}^{0}(5x^3+6x^2-x^4)dx+\int_{0}^{6}(5x^3+6x^2-x^4)dx,F=1.25x^4+2x^3-x^5/5,F(6)=$$

$$1620+432-1.2*1296=2052-1555.2=496.8,F(0)=0,F(-1)=-0.55.$$

$$S=F(6)-F(0)+F(0)-F(-1)=F(6)-F(-1)=497.35$$

## שאלה 3ב

לפי הציור אחת הפונקציות גדולה מהשניה לכל אורך הקטע וכיון ש-f(0)=1,g(0)=0 הרי שהעליונה היא f והתחתונה g. ולכן:

$$V=\pi\int_0^1 (e^x)^2\,dx-\pi\int_0^1 (x\sqrt{x})^2\,dx=\pi\int_0^1 (e^{2x}-x^3)dx, F=\pi(\frac{e^{2x}}{2}-\frac{x^4}{4}), F(1)-F(0)=\pi(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+0)=$$

$$=\frac{\pi}{4}(2e^2-3)=\frac{\pi}{4}(11.778112)=2.944528\pi=9.2505076.$$

## שאלה 4א

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{ax^2+bx+4}-2}{x}=\frac{2-2}{0}=\frac{0}{0}=^{*}\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+4}}-0}{1}=\frac{b}{4}$$

$\lim_{x\to 0-}\frac{2b}{a+e^{\frac{3}{x}}}=\frac{2b}{a+e^{-\infty}}=\frac{2b}{a}$ ולכן לטובת הרציפות b/4=6=2b/a,b=24,a=8

## שאלה 4ב

נסמן ב-x את מספר המוצרים הנוספים ליום. אז מספר המוצרים ביום הוא 100+x ומחיר כל מוצר הוא 40-x/4 ולכן:

$$p(x)=(100+x)(40-x/4)=4000+40x-25x-\frac{x^2}{4}=4000+15x-\frac{x^2}{4},$$

$$0\le 40-x/4\to x\le 160, p'=15-\frac{x}{2}, p'<0\to x>30, p'>0\to x<30.$$

לכן הפונקציה עולה כאשר x קטן מ-30 ויורדת כאשר x גדול מ-30 ולכן מספר המוצרים הוא 130 ומחיר כל אחד הוא 32.5

## שאלה 5

$$f(x)=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

תחום הגדרה הוא $R-\{-1\}=(-\infty,-1)(-1,\infty)$

חתוך עם ציר X : $x^2+2x-3=0, x=1, x=-3$

חתוך עם ציר y $(0,-3)$

זוגיות-אי זוגיות כיון שתחום ההגדרה לא סימטרי, לא יכולה להיות זוגיות ואי זוגיות.

$$f'(x)=\frac{(2x+2)(x+1)^2-2(x+1)(x^2+2x-3)}{(x+1)^4}=\frac{2(x+1)[(x+1)^2-(x^2+2x-3)]}{(x+1)^4}=$$

$$=\frac{2[(x^2+2x+1)-(x^2+2x-3)]}{(x+1)^3}=\frac{8}{(x+1)^3}.f'<0\to x<-1,\ f'>0\to x>-1,$$

ולכן הקטע $(-\infty,-1)$ הוא קטע ירידה והקטע $(-1,\infty)$ הוא קטע עליה כיון ש x=-1 אינה בתחום ההגדרה אין מינימום ומקסימום מקומיים

$f'(x)=\frac{8}{(x+1)^3}.\to f''(x)=\frac{-24}{(x+1)^4}<0$ לכן הפונקציה תמיד בוכה אין נקודות פתול

אסימפטוטה משופעת תתכן רק ב-x=-1

$\lim_{x\to-1+}\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}=\frac{-4}{0+}=-\infty,\ \lim_{x\to-1-}\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}=\frac{-4}{0+}=-\infty$ ולכן העקומה נדבקת פעמים לישר x=-1 מהכוון של הציר השלילי.

כיון שהפונקציה היא רציונלית מספיק לחשב את האסימפטוטה המשופעת רק מהכוון החיובי. ונקבל:

$$f(x)=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}\to a=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2x}=0, b=\lim_{x\to\infty}f(x)-0x=\lim_{x\to\infty}f(x)=1$$

כלומר הישר האפקי y=1 הוא אסימפטוטה משופעת יחידה ב - x=±∞