

המכללה האקדמית נתניה

מבחן סופי במתמטיקה א' - מנהל עסקים

מועד א יום ראשון כ"א שבט התשס"ט 15 פברואר 2009

שם המרצה:

תאריך הבחינה:

משך הבחינה: שעתיים וחצי

חומר עזר: מחשבון (לא גרפי).

חלק א' ייבדק רק לפי התשובות הסופיות שיופיעו על טופס הבחינה. חלק ב' ייבדק לפי המחברת.

חלק א.

1. חשב שניים משלושת הגבולות הבאים:
(20%)

א: $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

א. $\frac{1}{2}$

ב. 0

ג. $-\frac{1}{2}$

ד. 1

ה. אף אחת מהתשובות האחרות איננה נכונה.

ב: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^3 - 11x^2 + 3x}{5x^3 - 11x^2 + 8x} \right)^{3x^2 + 5}$

א. 1

ב. e^{-5}

ג. e^3

ד. e^{-3}

ה. אף אחת מהתשובות האחרות איננה נכונה.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 3x(\sqrt{25x^2 + 7} - \sqrt{25x^2 - 3})$$

ג:

א. 5

ב. -5

ג. 3

ד. 0

ה. אף אחת מהתשובות האחרות איננה נכונה.

$$f(x) = \frac{8x-5}{3-7x}$$

2. מצא את הפונקציה ההפוכה (כולל תחום וטווח) לפונקציה

(7%)

3. מצא את המינימום והמקסימום המוחלטים (גלובלים) של

(7%)

$$f(x) = (\ln x)^2 - 2 \ln x \quad \text{בקטע } [1, e^3].$$

$$4. נתונות הפונקציות: $f(x) = (3x^2 - 6x + 5)^4$ ו $g(x) = \frac{4x-3}{x^2+1}$.$$

(7%)

חשב את: $f(g(x))$ ואת $g(f(x))$.

$$f(g(x)) =$$

5. על כל אחת מהשאלות הבאות יש לענות רק "כן" או "לא". משקל של כל אחת מהשאלות שווה ל 3 נקודות.

א: הפונקציה $y = x^3 + 1$ היא פונקציה אי-זוגית.

כן	לא

ב: הפונקציה $y = (5 - x)^2$ היא חד-חד-ערכית

כן	לא

ג. הפונקציה $y = \frac{1}{x + \sqrt{3}}$ היא פונקציה רציונאלית.

כן	לא

חלק ב'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על כל אחת מהשאלות הבאות:

6. ענה על אחד משני הסעיפים הבאים:
(20%)

א: עבור אילו ערכי a ו b הפונקציה הבאה תהיה רציפה לכל x .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{6b(x-3)} - e^{2b(x-3)}}{2x-6} & x > 3 \\ -2 & x = 3 \\ \frac{a+5}{b + e^{\frac{-4}{(3-x)^3}}} & x < 3 \end{cases}$$

ב: מחיר ייצור של x מקלטי רדיו ליום הוא $(0.25x^2 + 35x + 25)$ ומחיר מקלט רדיו אחד הוא $(50 - 0.5x)$. מה צריך להיות היקף הייצור ליום (x) כדי לקבל רווח מקסימלי.

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x - 1}{x - 5}$$

7. נתונה הפונקציה:

(30%)

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א: תחום הגדרה

ב: נקודות חיתוך עם הצירים.

ג: תחומי עליה וירידה.

ד: נקודות קיצון.

ה: נקודות פיתול, תחומי קמירות וקעירות.

ו: זוגיות/אי-זוגיות הפונקציה.

ז: אסימפטוטות אנכיות ומשופעות.

ח: שרטט את גרף הפונקציה.

בהצלחה!!!

תשובות

תשובה 1

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty = ? = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} = \frac{0-1+1}{0} \square \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \frac{1}{x} + \ln x - 1}{\ln x + \frac{(x-1)}{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\ln x + \frac{(x-1)}{x}} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x \ln x + x - 1} \square \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \ln x}{1 + \ln x + 1} = \frac{1}{2}$$

ב.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^3 - 11x^2 + 3x}{5x^3 - 11x^2 + 8x} \right)^{3x^2+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^3 - 11x^2 + 8x - 5x}{5x^3 - 11x^2 + 8x} \right)^{3x^2+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5x}{5x^3 - 11x^2 + 8x} \right)^{3x^2+5} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5x}{5x^3 - 11x^2 + 8x} \right)^{\left(-\frac{5x^3 - 11x^2 + 8x}{5x} \right) (3x^2+5) \left(-\frac{5x}{5x^3 - 11x^2 + 8x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2+5) \left(-\frac{5x}{5x^3 - 11x^2 + 8x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{15x^3 + 25x}{5x^3 - 11x^2 + 8x} \right)} = e^{-3}$$

ג.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 3x(\sqrt{25x^2 + 7} - \sqrt{25x^2 - 3}) = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x \frac{(\sqrt{25x^2 + 7} - \sqrt{25x^2 - 3})(\sqrt{25x^2 + 7} + \sqrt{25x^2 - 3})}{(\sqrt{25x^2 + 7} + \sqrt{25x^2 - 3})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} 3x \frac{(25x^2 + 7) - (25x^2 - 3)}{(\sqrt{25x^2 + 7} + \sqrt{25x^2 - 3})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{30x}{(\sqrt{25x^2 + 7} + \sqrt{25x^2 - 3})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{30\sqrt{x^2}}{(\sqrt{25x^2 + 7} + \sqrt{25x^2 - 3})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{30}{\left(\sqrt{25 + \frac{7}{x^2}} + \sqrt{25 - \frac{3}{x^2}} \right)} = \frac{30}{5+5} = 3.$$

תשובה 2

תחום ההגדרה הוא לכל x למעט $3/7$. כמו כן נקבל:

$$y = \frac{8x-5}{3-7x} \rightarrow y(3-7x) = 8x-5 \rightarrow 3y-7xy = 8x-5$$

$$\rightarrow 8x+7xy = 3y+5 \rightarrow x(8+7y) = 3y+5 \rightarrow x = \frac{3y+5}{8+7y}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{5+3x}{8+7x} : R - \{-8/7\} \rightarrow R - \{3/7\}$$

לכן

תשובה 3

נקודות שבהן הנגזרת היא $f(x) = (\ln x)^2 - 2 \ln x$ ולכן $f'(x) = \frac{2 \ln x}{x} - \frac{2}{x} = \frac{2(\ln x - 1)}{x}$

הן כאשר $\ln x = 1$ או $x = e$. נקודות בהן בנגזרת לא מוגדרת הן $x \leq 0$ אבל תחום ההגדרה הוא בין 1 ו- e^3 , ולכן מתוך שתי הנקודות הללו רק e בתחום. נביט על נקודה זו, ועל קצות הקטע, ונציב את כלן ב- f , ונקבל:

$$f(x) = (\ln x)^2 - 2 \ln x, f(1) = 0^2 - 2 \cdot 0 = 0, f(e) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1, f(e^3) = 3^2 - 2 \cdot 3 = 3$$

לכן מקסימום מוחלט בנקודה $(e^3, 3)$ ומינימום מוחלט בנקודה $(e, -1)$.

תשובה 4

$$g(x) = \frac{4x-3}{x^2+1} \quad f(x) = (3x^2 - 6x + 5)^4$$

אז:

$$g(f(x)) = \frac{4(3x^2 - 6x + 5)^4 - 3}{((3x^2 - 6x + 5)^4)^2 + 1} = \frac{4(3x^2 - 6x + 5)^4 - 3}{(3x^2 - 6x + 5)^8 + 1} =$$

$$f(g(x)) = (3g(x)^2 - 6g(x) + 5)^4 = \left(3\left(\frac{4x-3}{x^2+1}\right)^2 - 6\frac{4x-3}{x^2+1} + 5\right)^4.$$

תשובה 5-א

תחום ההגדרה של $y = x^3 + 1$ הוא כל \mathbb{R} וזהו תחום סימטרי ובנוסף מתקיים:

$$f(-x) = (-x)^3 + 1 = -x^3 + 1.$$

תשובה 5-ב

הפונקציה $y = (5-x)^2$ איננה חח"ע כי

$$f(4) = (5-4)^2 = 1^2 = 1, f(6) = (5-6)^2 = (-1)^2 = 1$$

תשובה 5-ג

היא אכן רציונלית כי המונה הוא קבוע ולכן פולינום ממעלה 0, והמכנה פולינום ממעלה ראשונה.

$$y = \frac{1}{x + \sqrt{3}}$$

תשובה 6-א

נביט על

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{e^{6b(x-3)} - e^{2b(x-3)}}{2x-6} = \frac{e^0 - e^0}{2 \cdot 3 - 6} = \frac{0}{0} \quad \square \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{6be^{6b(x-3)} - 2be^{2b(x-3)}}{2} = \frac{6be^0 - 2be^0}{2} = \frac{4b}{2} = 2b$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{a+5}{b+e^{\frac{-4}{(3-x)^3}}} = \frac{a+5}{b+e^{\frac{-4}{(0^+)^3}}} = \frac{a+5}{b+e^{-\infty}} = \frac{a+5}{b+0} = \frac{a+5}{b}.$$

ולכן

$$\frac{a+5}{b} = -2 = 2b \rightarrow b = -1, a = -3.$$

תשובה 6-ב

$$\pi(x) = (50 - 0.5x)x - (0.25x^2 + 35x + 25) = -0.75x^2 + 15x - 25 = -\frac{3x^2 - 60x + 100}{4}, \pi'(x) = -\frac{6x - 60}{4} = -\frac{3(x-10)}{2}$$

ברור כי x חייב להיות אי שלילי כי הוא מבטא מספר של מוצרים, וכי מחירה מכשיר בחנות הוא חיובי כלומר צריך להתקיים כי $0 \leq x \leq 100$. לכן נציב בפונקציה הרוח שלש

נקודות, $x=0,10,100$ ונקבל ערכי y מתאימים $-25,1400,-1025$ וברור כי יש ליצר 10 מקלטים ביום כדי לקבל רווח מקסימלי.

תשובה 7

$f(x) = \frac{x^2 - 4x - 1}{x - 5}$. תחום הגדרה כל R למעט $x=5$. כיום שתחום ההגדרה לא סימטרי סביב הראשית הפונקציה איננה זוגית או איזוגית אלא כללית. אם $x=0$ אז $y=0.2$ ואם $x=2 \pm \sqrt{5}$ אז $y=0$.

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x - 1}{x - 5}, f' = \frac{(2x - 4)(x - 5) - (x^2 - 4x - 1)}{(x - 5)^2} = \frac{x^2 - 10x + 21}{(x - 5)^2},$$

$$f'' = \frac{(2x - 10)(x - 5)^2 - 2(x - 5)(x^2 - 10x + 21)}{(x - 5)^4} = \frac{2(x - 5)[(x - 5)^2 - (x^2 - 10x + 21)]}{(x - 5)^4} =$$

$$= \frac{2(x - 5)4}{(x - 5)^4} = \frac{8}{(x - 5)^4}$$

לכן בהבנה של הגרף של f נקבל 4 קטעים: בקטע $(-\infty, 3)$ הפונקציה עולה ובוכה, בקטע $(3, 5)$ הפונקציה יורדת ובוכה, בקטע $(5, 7)$ הפונקציה יורדת ומחייכת ובקטע $(7, \infty)$ הפונקציה עולה ומחייכת.

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x^2 - 4x - 1}{x - 5} = \frac{4}{0^-} = -\infty, \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x^2 - 4x - 1}{x - 5} = \frac{4}{0^+} = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x - 1}{(x - 5)x} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x - 1}{(x - 5)} - x =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x - 1}{(x - 5)} - \frac{x^2 - 5x}{(x - 5)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1}{(x - 5)} = 1.$$

כיון שהפונקציה רציונלית אז $y=x+1$ הוא ישר אסימפטוטה משופע ב- $\pm\infty$, וכמו כן $x=5$ הוא ישר אסימפטוטה אנכית אליו העקום נדבק פעמיים.