המכללה האקדמית נתניה

מבחן במתמטיקה א' -מנהל עסקים

שם המרצה: מוזיצ'וק, דולה
תאריך הבחינה: י"ח תמוז התשס"ז 4-7-2007
משך הבחינה: שעתיים וחצי
חומר עזר: מחשבון (לא גרפי).

בחלק א' תבדקנה רק התשובות הסופיות שתופענה על טופס הבחינה. בחלק ב' תבדקנה תשובות המלאות שתופענה במחברת.

חלק א.

1. חשב שניים משלושת הגבולות הבאים:
(24%)

א:
$$\lim_{x\to\infty}(5x-2)(\sqrt{x^2+4}-x)=$$

א. ∞
ב. **1**
ג. **0**
ד. **10**

ב:
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{3x-1}=$$

א. 0
ב. e^2
ג. 1
ד. ∞

.

ג:
$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+x+1}{(e^x)^2+x+2}$$

א. **3**
ב. ∞
ג. **0**
ד. **3/2**

2. חשב שניים משלושת האינטגרלים הבאים: (16%)

א: $\int \frac{3xdx}{(x^4+2x^2+1)}dx =$

ב: $\int x^4(\ln x)^2 dx =$

ג: $\int xe^{x^2} dx =$

3. ענה על אחד מתוך שני הסעיפים הבאים:
(10%)

א: חשב את השטח החסום על ידי הגרפים של הפונקציות:
$f(x)=x^3$ ו $g(x)=\sqrt[3]{x}$.

השטח הוא:

ב: חשב את נפח גוף הסיבוב המתקבל מסיבוב סביב ציר ה -X
של השטח המוגבל בין הגרפים של הפונקציות $y=x^2+2x+1$ ו $y=x+1$
.

הנפח הוא:

חלק ב'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על כל אחת מהשאלות הבאות:

---

4. ענה על אחד משני הסעיפים הבאים:
(20%)

א: מצא את נקודות אי הרציפות וסוג אותן .

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4\ln(x)}{3x-3} & x>1\\ 1 & x=1\\ \dfrac{e^{x-1}-x}{x^2-2x+1} & x<1\end{cases}$$

ב: נתון דף ניר רבועי שארכו ורחבו12 ס"מ. מכל פינה שלו גזרו רבוע שארכו ורחבו x ואשר מקביל לצלעות הרבוע. נוצרה צורה דמוית צלב. את הצורה הזו קפלו כך שהאמצע נשאר על הקרקע ואת החלקים האחרים קפלו כלפי מעלה. נוצרה תבה חסרת מכסה. נפח התבה תלוי ב-x . איזה x יבטיח תבה בנפח מקסימלי?

5. נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{x^2}$
(30%)

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א: תחום הגדרה

ב: נקודות חיתוך עם הצירים.

ג: תחומי עליה וירידה.

ד: נקודות קיצון.

ה: נקודות פיתול , תחומי קמירות וקעירות .

ו: זוגיות/ אי- זוגיות הפונקציה.

ז: אסימפטוטות אנכיות ומשופעות.

ח: שרטט את גרף הפונקציה.

בהצלחה!!!

תשובות

תשובה 1-א

נציב:

$$\lim_{x\to\infty}(5x-2)(\sqrt{x^2+4}-x)=\infty(\infty-\infty)$$

זהו מקרה בעיתי ולכן נכפל ונחלק בצמוד ונקבל:

$$\lim_{x\to\infty}(5x-2)(\sqrt{x^2+4}-x)=\lim_{x\to\infty}(5x-2)(\sqrt{x^2+4}-x)\frac{(\sqrt{x^2+4}+x)}{(\sqrt{x^2+4}+x)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}(5x-2)\frac{(x^2+4-x^2)}{(\sqrt{x^2+4}+x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4(5x-2)}{(\sqrt{x^2+4}+x)}$$

נחלק מונה ומכנה בחזקה הגבוהה ביותר:

$$\lim_{x\to\infty}(5x-2)(\sqrt{x^2+4}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{4(5x-2)}{(\sqrt{x^2+4}+x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4(5-\frac{2}{x})}{(\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}+1)}=\frac{4\cdot 5}{1+1}=10$$

תשובה 1-ב

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{3x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1+2}{x^2-1}\right)^{3x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)^{3x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{(x^2-1)}{2}}\right)^{3x-1}=$$

$$==\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{(x^2-1)}{2}}\right)\right]^{\frac{(x^2-1)}{2}\cdot(3x-1)\cdot\frac{2}{(x^2-1)}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{2(3x-1)}{x^2-1}}$$

כדי למצוא את המעריך נחלק מונה ומכנה ב-x^2 ונקבל:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2(3x-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{6/x-6/x^2}{1-1/x^2}=\frac{0-0}{1-0}=0.$$

לכן הגבול המקורי הוא $e^0=1.$

תשובה 1-ג

$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+x+1}{(e^x)^2+x+2}$. נשים לב כי $(e^x)^2=e^{2x}$ נציב זאת ונקבל:

$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+x+1}{(e^x)^2+x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+x+1}{e^{2x}+x+2}=\frac{\infty+\infty+1}{\infty+\infty+2}=\frac{\infty}{\infty}$ לכן מותר ללפטל (להשתמש בכלל ל'הופיטל) ונקבל:

$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+x+1}{(e^x)^2+x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+x+1}{e^{2x}+x+2}\;\square\;\lim_{x\to\infty}\frac{6x+1}{2e^{2x}+1}=\frac{\infty}{\infty}$ נלפטל שוב ונקבל

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+x+1}{(e^x)^2+x+2}\;\square\;\lim_{x\to\infty}\frac{6x+1}{2e^{2x}+1}\;\square\;\lim_{x\to\infty}\frac{6}{4e^{2x}}=\frac{6}{\infty}=0$$

תשובה 2-א

$\int\frac{3xdx}{(x^4+2x^2+1)}dx=$ נשים לב להצבה $u=x^2, du=2xdx, xdx=du/2$ ונקבל

$\int\frac{3xdx}{(x^4+2x^2+1)}dx=\int\frac{3\,du/2}{u^2+2u+1}=\frac{3}{2}\int\frac{du}{(u+1)^2}$ שוב נציב $t=u+1, dt=du$

ולכן:

$$\int\frac{3xdx}{(x^4+2x^2+1)}dx=\frac{3}{2}\int\frac{du}{(u+1)^2}=\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{-3}{2t}+c=\frac{-3}{2(u+1)}+c=$$
$$=\frac{-3}{2(x^2+1)}+c=$$

תשובה 2-ב

$\int x^4(\ln x)^2 dx =$ נבצע אינטגרציה בחלקים,

ונקבל: $f'=x^4, g=(\ln x)^2 \to f=\frac{x^5}{5}, g'=2(\ln x)\frac{1}{x}$

$\int x^4(\ln x)^2 dx = \frac{x^5}{5}(\ln x)^2 - \int \frac{x^5}{5}2(\ln x)\frac{1}{x}dx = \frac{x^5}{5}(\ln x)^2 - \int \frac{2x^4}{5}(\ln x)dx$ שוב נבצע אינטגרציה בחלקים, $f'=x^4, g=\ln x \to f=\frac{x^5}{5}, g'=\frac{1}{x}$ ונקבל:

$$\int x^4(\ln x)^2 dx = \frac{x^5}{5}(\ln x)^2 - \int \frac{2x^4}{5}(\ln x)dx = \frac{x^5}{5}(\ln x)^2 - \frac{2}{5}[\frac{x^5}{5}\ln x - \int \frac{x^5}{5}\frac{1}{x}dx] =$$
$$= \frac{x^5}{5}(\ln x)^2 - \frac{2}{25}\ln x + \frac{2x^5}{125} + c = \frac{x^5}{125}[25(\ln x)^2 - 10\ln x + 2] + c$$

תשובה 2-ג

$\int xe^{x^2}dx =$ נבצע הצבה $u=x^2, du=2xdx, xdx=\frac{du}{2}$ ונקבל

$$\int xe^{x^2}dx = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + c = \frac{e^{x^2}}{2} + c$$

תשובה 3-א

כדי לחשב את השטח בין $f(x)=x^3$ ו $g(x)=\sqrt[3]{x}$ נשווה ביניהן:

ו $x^3=\sqrt[3]{x} \to x^9=x \to x^9-x=0 \to x(x^8-1)=0 \to x=0,1,-1$. כדי לדעת מיהי הפונקציה היותר גדולה בין 0 ו-1, נבחר כנציג למשל את 0.125 ונציב בשתיהן. ונקבל $\sqrt[3]{1/8} = 1/2 > (1/8)^3 = 1/2^9 = 1/512$ ולכן בקטע זה השרש יותר גדול ונקבל את השטח:

$$S=\int_0^1(\sqrt[3]{x}-x^3)dx = [\frac{3x^{4/3}}{4}-\frac{x^4}{4}]_0^1 = (\frac{3}{4}-\frac{1}{4})-(0-0)=0.5$$

לפי הסימטריה של הפונקציה השטח הכולל הוא כפול מהשטח האחרון ושוה ל-1.

.

תשובה 3-ב

נביט על $y=x^2+2x+1=(x+1)^2$ ו $y=x+1$. נשוה בין הפונקציות ונקבל $x+1=(x+1)^2 \to u=u^2 \to u(u-1)=0 \to u=0,1 \to x+1=0,1 \to x=-1,0$ כדי לדעת מי מהפונקציות גדולה יותר בקטע נבחר את $x=-0.5 \to u=0.5$ כנציג. אז $u^2=0.25<u=0.5$ ולכן פונקצית הרבוע יותר קטנה. ולכן:

$$V=\pi\int_{-1}^{0}[(x+1)^2-(x+1)^4]dx \to u=x+1, du=dx$$

$$V=\pi\int_{0}^{1}[u^2-u^4]du=\pi(\frac{u^3}{3}-\frac{u^5}{5})_0^1=\pi(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})-(0-0)=\frac{2\pi}{15}$$

תשובה 4-א

$$f(x)=\begin{cases}\frac{4\ln(x)}{3x-3} & x>1\\ 1 & x=1\\ \frac{e^{x-1}-x}{x^2-2x+1} & x<1\end{cases}$$ נביט בגבול מימין ל 1.

$\lim_{x\to 1+}\frac{4\ln(x)}{3x-3}=\frac{0}{0}$ ⟹ $\lim_{x\to 1+}\frac{4\frac{1}{x}}{3}=\frac{4}{3}$ נביט בגבול משמאל ל

1. $\lim_{x\to 1-}\frac{e^{x-1}-x}{x^2-2x+1}=\frac{e^0-1}{1-2+1}=\frac{0}{0}$ ⟹ $\lim_{x\to 1-}\frac{e^{x-1}-1}{2x-2}=\frac{0}{0}$ ⟹ $\lim_{x\to 1-}\frac{e^{x-1}}{2}=\frac{1}{2}$ ולכן זוהי נקודת קפיצה.

תשובה 4-ב

אחרי שגוזרים את ארבעת הרבועים בפינות ומקפלים, יוצאת תבה שארכה 12-2x רחבה 12-2x וגבהה x. לכן הנפח הוא $(12-2x)(12-2x)x=4x^3-48x^2+144x$ התחום מוגבל בין 0 ו-6. נגזור ונקבל $12x^2-96x+144=12(x^2-8x+12)=12(x-6)(x-2)$ ולכן יש שלש נקודות חשודות X=0,6,2 כאשר רק 2 פנימית. נציב בפונקצית הנפח ונקבל כי הנפח ב- x=2 מקסימלי.

תשובה 5 חקירה מלאה.

תחום הגדרה כל x, אין זוגיות או איזוגיות לפונקציה, חתוך עם הצירים : חתוך עם ציר y –(0,0) . חתוך עם ציר x נקבל:

$f(x)=\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{x^2}=x^{5/3}+x^{2/3}=x^{2/3}(1+x)=0\rightarrow x=0,-1$ כעת נגזור פעם ופעמים:

$$f(x)=x^{5/3}+x^{2/3}\rightarrow f'=\frac{5}{3}x^{2/3}+\frac{2}{3}x^{-1/3}=x^{-1/3}(\frac{5}{3}x+\frac{2}{3})=\frac{5x+2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$\rightarrow f''=\frac{10}{9}x^{-1/3}-\frac{2}{9}x^{-4/3}=x^{-4/3}(\frac{10}{9}x-\frac{2}{9})=\frac{10x-2}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

ונקבל כי נקודת התאפסות של 'f היא 0.4-. וכי נקודת חוסר הגדרה היא 0. כמו כן נקודת התאפסות של "f היא0.2 וכי נקודת חוסר הגדרה היא 0. כדי למצא את הסימנים של הנגזרת נבחר עבורה שלשה נציגים: את 1, 0.125- ו1-. נציב ונקבל:כי 'f חיובית בקרן (-∞,-0.4) שלילית בקטע (-0.4,0) וחיובית בקרן (0,∞) .

כדי למצא את הסימנים של הנגזרת השניה נבחר שלשה נציגים: את 1, 0.125 ו1-. עבורה. נציב ונקבל:כי "f שלילית בקרן (-∞,0) שלילית בקטע (0,0.2) וחיובית בקרן (0.2,∞) .

לכן נקבל: בקרן (-∞,-0.4) f עולה ובוכה, בקטע (-0.4,0) f יורדת ובוכה. בקטע (0,0.2) f עולה ובוכה ובקרן (0.2,∞) f עולה ומחיכת. נקודות קיצון מקומיות: X=-0.4 נקודת מקסימום מקומי ו-X=0 נקודת מינימום מקומי. 0.2 היא נקודת פתול.

אסיפטוטה אנכית אין כי כל נקודה היא בתחום ההגדרה ונבדק אסימפטוטות משופעות:

$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{5/3}+x^{2/3}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}(x^{2/3}+x^{-1/3})=\infty+0=\infty$ לכן a לא קים ואין אסימפטוטה משופעת.