המכללה האקדמית נתניה

מבחן במתמטיקה א' מועד ב' -מנהל עסקים

שם המרצה: בלנוב, דולה
תאריך הבחינה: יום א כו אדר התשס"ט 22-3-2009
משך הבחינה: שעתיים וחצי
חומר עזר: מחשבון (לא גרפי).

חלק א' ייבדק רק לפי התשובות הסופיות שיופיעו על טופס הבחינה. חלק ב' ייבדק לפי המחברת.

חלק א.

1. חשב שניים משלושת הגבולות הבאים: (20%)

א: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{5}{x^5-1}\right)$

א. 2
ב. 3
ג. -3
ד. 1
ה. אף אחת מהתשובות האחרות איננה נכונה.

ב: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x^3+7x^2+6x}{4x^3+7x^2+9x}\right)^{8x^2+3x-2}$

א. 1
ב. e^6
ג. e^{-6}
ד. e^{-1}
ה. אף אחת מהתשובות האחרות איננה נכונה.

ג: $\lim\limits_{x\to\infty} 6x\left(\sqrt{16x^2-4}-4x\right)$

א. 4
ב. -4
ג. -3

ד. 0

ה. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

2. מצא את הפונקציה ההפוכה לפונקציה $f(x)=\frac{6-9x}{4x+1}$ (7%)

3. מצא את המינימום והמקסימום המוחלטים (גלובלים) של $f(x)=\ln(x^2+1)$ בקטע $[-1,3]$. (7%)

4. נתונות הפונקציות: $f(x)=\sqrt{(4x^2-5x+2}$ ו $g(x)=\frac{2x^3-3}{5-9x}$.

(7%)

חשב את: $f(g(x))$ ואת $g(f(x))$.

$f(g(x))=$

5. על כל אחת מהשאלות הבאות יש לענות רק **"כן"** או **"לא"**. משקל של כל אחת מהשאלות **שווה ל 3 נקודות.**

א: הפונקציה $y=3x^2-1$ היא פונקציה זוגית.

כן	לא

ב: הפונקציה $y=x^3-\sqrt{3}$ היא חד-חד-ערכית

כן	לא

ג. הפונקציה $y=\dfrac{5x-7}{3x+\sqrt{x}}$ היא פונקציה רציונאלית.

לא	כן

חלק ב'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על כל אחת מהשאלות הבאות:

---

6. ענה על אחד משני הסעיפים הבאים:
(20%)

א: עבור אילו ערכי a ו b הפונקציה הבאה תהיה רציפה לכל x .

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(5-2x)}{a(x-2)} & x>2\\[2ex] 4 & x=2\\[2ex] b+\dfrac{a+6}{b+e^{\frac{-3}{(x-2)^5}}} & x<2\end{cases}$$

ב. מפעל מייצר חומצה במיכלים, במחיר 100 ₪ למיכל. עלות היצור היומית של x מיכלים היא: $1500+40x+0.002x^3$. כמה מיכלים של חומצה כדאי למפעל לייצר ולמכור ביום כדי להגיע לרווח מקסימלי?

7. נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{-3x^2+5x-5}{x-1}$
(30%)

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א: תחום הגדרה

ב: נקודות חיתוך עם הצירים.

ג: תחומי עליה וירידה.

ד: נקודות קיצון.

ה: נקודות פיתול , תחומי קמירות וקעירות .

ו: זוגיות/ אי- זוגיות הפונקציה.
ז: אסימפטוטות אנכיות ומשופעות.
ח: שרטט את גרף הפונקציה.

בהצלחה!!!

תשובות

שאלה 1-א

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{5}{x^5-1}\right)=\frac{1}{0}-\frac{5}{0}=\infty-\infty=?.$$

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{5}{x^5-1}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{1(x^5-1)}{(x-1)(x^5-1)}-\frac{5(x-1)}{(x-1)(x^5-1)}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x^5-5x+4}{x^6-x^5-x+1}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to1}\frac{5x^4-5}{6x^5-5x^4-1}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to1}\frac{20x^3}{30x^4-20x^3}=\frac{20}{10}=2.$$

פתרון אחר

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{5}{x^5-1}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{5}{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x^4+x^3+x^2+x+1)-5}{x^5-1}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^4+x^3+x^2+x-4}{x^5-1}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to1}\frac{4x^3+3x^2+2x+1}{5x^4}=\frac{10}{5}=2.$$

שאלה 1-ב

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^3+7x^2+6x}{4x^3+7x^2+9x}\right)^{8x^2+3x-2}=1^\infty=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^3+7x^2+9x-3x}{4x^3+7x^2+9x}\right)^{8x^2+3x-2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3x}{4x^3+7x^2+9x}\right)^{8x^2+3x-2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3x}{4x^3+7x^2+9x}\right)^{\frac{4x^3+7x^2+9x}{-3x}\frac{-3x}{4x^3+7x^2+9x}(8x^2+3x-2)}=$$

$$=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-3x}{4x^3+7x^2+9x}(8x^2+3x-2)}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-3x(8x^2+3x-2)}{4x^3+7x^2+9x}}=e^{-6}$$

שאלה 1-ג

$$\lim_{x\to\infty} 6x(\sqrt{16x^2-4}-4x)=\infty(\infty-\infty)=?$$

$$\lim_{x\to\infty} 6x(\sqrt{16x^2-4}-4x)=\lim_{x\to\infty}\frac{6x(\sqrt{16x^2-4}-4x)(\sqrt{16x^2-4}+4x)}{\sqrt{16x^2-4}+4x=}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x[16x^2-4-16x^2]}{\sqrt{16x^2-4}+4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-24x}{\sqrt{16x^2-4}+4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-24x}{\sqrt{x^2(16-4/x^2)}+4x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-24x}{x\sqrt{(16-4/x^2)}+4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-24x}{x(\sqrt{(16-4/x^2)}+4)}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-24}{\sqrt{16-4/x^2}+4}=\frac{-24}{4+4}=-3$$

שאלה 2

$$f(x)=\frac{6-9x}{4x+1}:R-\{-1/4\}\to R.$$

$$y(4x+1)=6-9x\to 4xy+y=6-9x\to 4xy+9x=6-y\to x(4y+9)=6-y$$

$$\to x=\frac{6-y}{4y+9}\to y=\frac{6-x}{4x+9}:R-\{-9/4\}\to R-\{-1/4\}.$$

שאלה 3

$f(x)=\ln(x^2+1)\to f'(x)=\frac{2x}{x^2+1},\ f'=0\to 2x=0\to x=0$ כיון שמדובר בקטע $[-1,3]$, יש לנו 3 נקודות חשודות שבהן או שהנגזרת מתאפסת, או שהן קצות הקטע .
נציב כל נקודה בפונקציה המקורית:

$$f(x)=\ln(x^2+1), x=-1,0,3\to f(-1)=\ln(2),\ f(0)=\ln(1)=0,\ f(3)=\ln(10).$$

לכן נקודת מקסימום מוחלטת היא $(3,\ln(10))$ ומינימום מוחלטת היא $(0,0)$.

שאלה 4

$f(x)=\sqrt{4x^2-5x+2}$ ו $g(x)=\frac{2x^3-3}{5-9x}$. אז

$$g(f(x))=\frac{2(\sqrt{4x^2-5x+2})^3-3}{5-9\sqrt{4x^2-5x+2}},\ f(g(x))=\sqrt{4(\frac{2x^3-3}{5-9x})^2-5(\frac{2x^3-3}{5-9x})+2}$$

שאלה 5

א.

$y=3x^2-1$ ותחום ההגדרה הוא כל R, ולכן יש טעם בכלל לבדוק את התנאי השני.
ומתקיים: $y(-x)=3(-x)^2-1=3x^2-1=y(x).$ ולכן זו פונקציה זוגית.

ב. $y=x^3-\sqrt{3}$ ולכן

$$f(a)=f(b)\rightarrow a^3-\sqrt{3}=b^3-\sqrt{3}\rightarrow a^3=b^3\rightarrow a^3-b^3=0\rightarrow(a-b)(a^2+ab+b^2)=0$$

$$\rightarrow(a-b)b^2\frac{a^2+ab+b^2}{b^2}=0\rightarrow(a-b)b^2((a/b)^2+(a/b)+1)=0\rightarrow$$

$$(a=b)\vee\frac{a}{b}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}\rightarrow a=b$$

ולסכום הפונקציה אכן חח"ע.

ג. הפונקציה $y=\dfrac{5x-7}{3x+\sqrt{x}}$ אינה רציונלית כי המכנה איננו פולינום.

שאלה 6
א

נביט ב
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(5-2x)}{a(x-2)} & x>2\\ 4 & x=2\\ b+\dfrac{a+6}{b+e^{\frac{-3}{(x-2)^5}}} & x<2\end{cases}$$

ונחשב את הגבולות החד צדדיים ב-x=2

$$\lim_{x\to2+}\frac{\ln(5-2x)}{a(x-2)}=\frac{\ln(1)}{0}=\frac{0}{0}=?$$

$$\lim_{x\to2+}\frac{\ln(5-2x)}{a(x-2)}\ \lim_{x\to2+}\frac{-2/(5-2x)}{a}=\frac{-2/1}{a}=\frac{-2}{a}$$

ולכן: $\displaystyle\lim_{x\to2-}b+\frac{a+6}{b+e^{\frac{-3}{(x-2)^5}}}=b+\frac{a+6}{b+e^{\frac{-3}{(0-)^5}}}=b+\frac{a+6}{b+e^{+\infty}}=b+\frac{a+6}{+\infty}=b+0=b$

$$\frac{-2}{a}=b=4\rightarrow b=4,a=-1/2$$

ב.   ההכנסה היומית עבור כל x המיכלים היא 100x ולכן:

$$f(x) = 100x - (1500 + 40x + 0.002x^3) = 60x - 0.002x^3 - 1500 \rightarrow$$

ולכן $f'(x) = 60 - 0.06x^2 = 0.06(10000 - x^2) = 0.06(100 - x)(100 + x).$:

$$f' > 0 \rightarrow -100 < x < 100,\ f' < 0 \rightarrow (x > 100) \vee (x < 100).$$

x=100 נקודת מקסימום מקומי ומוחלט.

שאלה 7

$f(x) = \dfrac{-3x^2 + 5x - 5}{x - 1}$ תחום ההגדרה R-{1}. כיון שתחום ההגדרה אינו סימטרי, אי אפשר לדבר אודות זוגיות או איזוגיות, וזוהי פונקציה כללית. כעת נביט על חתוך עם הצירים:

$$f(x) = \frac{-3x^2 + 5x - 5}{x - 1}, x = 0 \rightarrow y = \frac{-5}{-1} = 5, y = 0 \rightarrow -3x^2 + 5x - 5 = 0 \rightarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(-3)(-5)}}{2(-3)} = \frac{-5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(-3)(-5)}}{2(-3)} =$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{-35}}{-6}$$

ולכן אין נקודות חתוך עם ציר x.

$$f(x) = \frac{-3x^2 + 5x - 5}{x - 1} \rightarrow f'(x) = \frac{(-6x + 5)(x - 1) - (-3x^2 + 5x - 5)\cdot 1}{(x - 1)^2} =$$

$$= \frac{-6x^2 + 6x + 5x - 5 + 3x^2 - 5x + 5}{(x - 1)^2} = \frac{-3x^2 + 6x}{(x - 1)^2} = \frac{-3x(x - 2)}{(x - 1)^2}, f''(x) =$$

$$= \frac{(-6x + 6)(x - 1)^2 - (-3x^2 + 6x)2(x - 1)}{(x - 1)^4} = \frac{2(x - 1)[-3(x - 1)^2 - (-3x^2 + 6x)]}{(x - 1)^4} =$$

$$= \frac{2[(-3x^2 + 6x - 3) + 3x^2 - 6x]}{(x - 1)^3} = \frac{-6}{(x - 1)^3}$$

לכן נקודות חשובות בבדיקת f' הן x=0,1,2 ובבדיקת f'' היא x=1, ומקבלים כי בקטע (-∞,0) f יורדת ומחייכת, בקטע (0,1) עולה ומחייכת, בקטע (1,2) עולה ובוכה ובקטע (2,∞) יורדת ובוכה.

הנקודה היחידה בה תתכן אסימפטוטה אנכית היא x=1 ובאמת הגבולות החד צדדיים של f ליד 1 הם ∞ משמאל ו-∞- מימין. לכן x=1 היא אסימפטוטה אנכית.

$$f(x)=\frac{-3x^2+5x-5}{x-1}\rightarrow a=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2+5x-5}{(x-1)x}=-3\rightarrow b=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2+5x-5}{x-1}-(-3)x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2+5x-5+3x^2-3x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-5}{x-1}=2\rightarrow y=-3x+2$$

וזוהי האסימפטוטה המשופעת.