המכללה האקדמית נתניה

מבחן במתמטיקה ב' - מנהל עסקים (מועד ב')

שם המרצה: מוזיצ'וק, דולה
תאריך הבחינה: 12.08.07
משך הבחינה: שעתיים וחצי
חומר עזר: מחשבון (לא גרפי).

בחלק א' תבדקנה רק התשובות הסופיות שתופענה על טופס הבחינה. בחלק ב' תבדקנה תשובות המלאות שתופענה במחברת.

חלק א.

1. חשב שניים משלושת הגבולות הבאים:
(24%)

א: $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2-2x}-2x}{1-2x}$$

א. ∞
ב. -2
ג. -4
ד. 0

ב: $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x^2}{x^2+x}\right)^{1-3x}$$

א. 0
ב. e^1
ג. e^2
ד. e^3

.

ג: $\lim_{x\to\infty}\frac{1+x\cdot\ln x}{1+x\sqrt{x}}$

א. 1
ב. ∞
ג. 0
ד. $-\infty$

2. חשב שניים משלושת האינטגרלים הבאים:
(16%)

א: $\int\left(\frac{\left(\sqrt{x}+x\cdot\sqrt[3]{x}\right)}{x\cdot\sqrt{x}}\right)^2dx$

ב: $\int x^{-2}\ln x dx$

ג: $\int\frac{6x^2-10}{x^3-5x+3}dx$

3. ענה על אחד מתוך שני הסעיפים הבאים:
(10%)

א: חשב את השטח החסום על ידי הגרפים של הפונקציות:
$y=x^3+2x^2, y=6x-3x^2$.

השטח הוא:

ב: חשב את נפח גוף הסיבוב המתקבל מסיבוב סביב ציר ה -X
של השטח המוגבל בין הגרפים של הפונקציות $y=\sqrt{1-x}$ ו $y=\sqrt[3]{1-x}$.

.

הנפח הוא:

חלק ב'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על כל אחת מהשאלות הבאות:

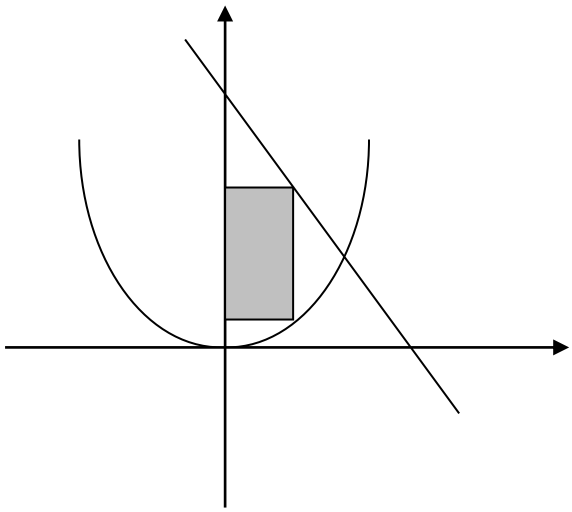
---

4. ענה על אחד משני הסעיפים הבאים: (20%)

א: מצא את נקודות אי הרציפות וסוג אותן .

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x-1}; x<0\\ e^{2x}-1, 0\le x\le 1\\ \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}, x>1\end{cases}$$

ב: בין גרף הפרבולה $y=x^2$, הישר $y=-x+1$ וציר ה-Y חסום מלבן.
מצא את המלבן בעל השטח המקסימלי וחשב את השטח המקסימלי.



.5

(30%)

נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א: תחום הגדרה

ב: נקודות חיתוך עם הצירים.

ג: תחומי עליה וירידה.

ד: נקודות קיצון.

ה: נקודות פיתול , תחומי קמירות וקעירות .

ו: זוגיות/ אי- זוגיות הפונקציה.

ז: אסימפטוטות אנכיות ומשופעות.

ח: שרטט את גרף הפונקציה.

תשובות

תשובה ראשונה א.

נציב את הגבול

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2-2x}-2x}{1-2x}=\frac{\infty-\infty}{-\infty}=?$$

נכפל ונחלק בצמוד:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2-2x}-2x}{1-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2-2x}-2x}{1-2x}\frac{(\sqrt{4x^2-2x}+2x)}{(\sqrt{4x^2-2x}+2x)}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-2x-4x^2}{(1-2x)((\sqrt{4x^2-2x}+2x))}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{(1-2x)((\sqrt{4x^2-2x}+2x))}$$

ונקבל:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2-2x}-2x}{1-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{(1-2x)((\sqrt{4x^2-2x}+2x))}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{(1-2x)((x\sqrt{4-2/x}+2x))}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{(1-2x)(x(\sqrt{4-2/x}+2))}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{(1-2x)(\sqrt{4-2/x}+2)}=\frac{-2}{(1-2\infty)(\sqrt{4-2/\infty}+2)}=\frac{-2}{(1-\infty)(\sqrt{4-0}+2)}=$$
$$=\frac{-2}{-\infty 4}=0.$$

ב.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x^2}{x^2+x}\right)^{1-3x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x-x+1}{x^2+x}\right)^{1-3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-x+1}{x^2+x}\right)^{1-3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-x+1}{x^2+x}\right)^{\frac{x^2+x}{-x+1}\frac{-x+1}{x^2+x}1-3x}$$
$$=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{(-x+1)(1-3x)}{x^2+x}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+1}{x^2+x}}=e^3$$

ג. $\lim_{x\to\infty}\frac{1+x\cdot\ln x}{1+x\sqrt{x}}=\frac{1+\infty\ln(\infty)}{1+\infty\cdot\infty^{0.5}}=\frac{1+\infty\cdot\infty}{1+\infty\cdot\infty}=\frac{\infty}{\infty}=?$ נשתמש בכלל L'Hospital ונקבל:

$\lim_{x\to\infty}\frac{1+x\cdot\ln x}{1+x\sqrt{x}}$ □ $\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\frac{1}{x}+\ln(x)}{1.5x^{0.5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\ln(x)}{1.5x^{0.5}}=\frac{1+\infty}{\infty}=?$ לכן נלפטל פעם נוספת:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+x\cdot\ln x}{1+x\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\ln(x)}{1.5x^{0.5}}\ \square\ \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1.5\cdot 0.5x^{-0.5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{0.5}}{1.5\cdot 0.5x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1.5\cdot 0.5x^{0.5}}=\frac{1}{1.5\cdot 0.5\cdot\infty}=0$$

2.א $\int\left(\frac{\left(\sqrt{x}+x\cdot\sqrt[3]{x}\right)}{x\cdot\sqrt{x}}\right)^2 dx$. קודם כל נסדר את השבר האלגברי:

ולכן: $\left(\frac{\left(\sqrt{x}+x\cdot\sqrt[3]{x}\right)}{x\cdot\sqrt{x}}\right)^2=\left(\frac{\left(\sqrt{x}\right)}{x\cdot\sqrt{x}}+\frac{\left(x\cdot\sqrt[3]{x}\right)}{x\cdot\sqrt{x}}\right)^2=(x^{-1}+x^{-\frac{1}{6}})^2=x^{-2}+2x^{-\frac{7}{6}}+x^{-\frac{1}{3}}$

$$I=\int(x^{-2}+2x^{-\frac{7}{6}}+x^{-\frac{1}{3}})dx=\frac{x^{-1}}{-1}+2\frac{x^{-\frac{1}{6}}}{\frac{-1}{6}}+\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+c=-\frac{1}{x}-\frac{12}{\sqrt[6]{x}}+\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}+c$$

2.ב $\int x^{-2}\ln x dx$ נשתמש באינטגרציה בחלקים, כאשר $f'=x^{-2},g=\ln(x),g'=x^{-1},f=-x^{-1}$

ולכן: $\int x^{-2}\ln x dx=-x^{-1}\ln(x)+\int(x^{-1}x^{-1})dx=-x^{-1}\ln(x)-x^{-1}+c$.

2-ג $\int\frac{6x^2-10}{x^3-5x+3}dx$ נשתמש בהצבה $u=x^3-5x+3, du=3x^2-5$ ולכן

$$\int\frac{6x^2-10}{x^3-5x+3}dx=\int\frac{2du}{u}=2\ln|u|+C=2\ln|x^3-5x+3|+C$$

3. נחתך נקודות חיתוך של הפונקציות.

$$x^3+2x^2=6x-3x^2\Leftrightarrow x^3+5x^2-6x=0\Leftrightarrow(x^2+5x-6)x=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ \text{או}\\ x^2+5x-6=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$x=0$ או $x=1$ או $x=-6$

קבלנו שני תחומים: $[-6,0]$ ו $[0,1]$. בתחום הראשון

$$S=\int_{-6}^{0}((x^3+2x^2)-(6x-3x^2))dx=\int_{-6}^{0}(x^3+5x^2-6x)dx=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{5x^3}{3}-3x^2\right)\Bigg|_{-6}^{0}=$$

$$0-\left(\frac{(-6)^4}{4}+\frac{5(-6)^3}{3}-3(-6)^2\right)=144$$

בתחום השני

$$S=\int_{0}^{1}((6x-3x^2)-(x^3+2x^2))dx=\int_{-6}^{0}(-x^3-5x^2+6x)dx=\left(-\frac{x^4}{4}-\frac{5x^3}{3}+3x^2\right)\Bigg|_{0}^{1}=$$

$$\left(-\frac{1^4}{4}-\frac{5\cdot 1^3}{3}+3\cdot 1^2\right)-0=\frac{13}{12}$$

לכן השטח הכולל הוא $144+1\frac{1}{12}=145\frac{1}{12}$.

3ב. $y=\sqrt{1-x}$ ו $y=\sqrt[3]{1-x}$.

ולכן $y=\sqrt[3]{1-x}=\sqrt{1-x}\to(\sqrt[3]{1-x})^6=(\sqrt{1-x})^6\to(1-x)^2=(1-x)^3$

$$\to(1-x)^2-(1-x)^3=0\to(1-x)^2(1-(1-x))=(1-x)^2x=0\to x=0{,}1$$

$$V=\pi\int_0^1[((1-x)^{1/3})^2-((1-x)^{1/2})^2]dx=\pi\int_0^1[(1-x)^{2/3}-(1-x)]dx, u=1-x, du=-dx,$$

$$V=-\pi\int_1^0[u^{2/3}-u]du=\pi\int_0^1[u^{2/3}-u]du=\pi\left(\frac{5u^{5/3}}{3}\Bigg|_0^1-\frac{u^2}{2}\Bigg|_0^1\right)=\pi\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{7\pi}{6}$$

4-א $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-1}; x<0\\ e^{2x}-1, 0\le x\le 1\\ \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}, x>1\end{cases}$ נחשב גבולות: $\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x-1}=\frac{0}{0-1}=0.$

$\lim_{x\to 0^+}(e^{2x}-1)=e^0-1=0.$. $\lim_{x\to 1^-}(e^{2x}-1)=e^2-1.$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{2}$$

ולכן: 0 נקודת רציפות, 1 נקודת קפיצה.

4-ב. נסמן את הקדקד הימני למטה על ידי (x,x^2), הקדקד שמעליו הוא $(x, 1-x)$ ולכן אורך צלע אחת הוא $1-x-x^2$ ואורך צלע שניה הוא x ולכן השטח הוא $S=x-x^2-x^3$ ויש מגבלה על x, אסור לו לעבור את x של חתוך הגרפים.

$$1-x=x^2 \Rightarrow x^2+x-1=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$ ולכן $$0\le x\le\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\approx 0.62$$

כעת נגזר:

$$S'=1-2x-3x^2, S'=0 \Rightarrow 1-2x-3x^2=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-3)}}{2\cdot(-3)}=\frac{2\pm4}{-6}$$

$$\Rightarrow x_1=-1, x_2=\tfrac{1}{3}$$

הערך היחיד של x ששייך לתחום $\left[0,\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$ הוא $x=1/3$. כדי למצוא שטח מקסימלי יש לחשב את $S(x)$ בנקודות $0,\frac{1}{3},\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$:

$$S(0)=S(\tfrac{-1+\sqrt{5}}{2})=0, S(1/3)=1-1/3-1/9=5/9$$

5. $f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$.

תחום הגדרה: $R-\{1\}$.

חתוך עם הצירים $y=0 \leftrightarrow x=0$

$$f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2} \to f'(x)=\frac{3x^2(x-1)^2-2(x-1)x^3}{(x-1)^4}=\frac{x^2(x-1)(3(x-1)-2x)}{(x-1)^4}=\frac{x^2(x-1)(x-3)}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}=\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}, f''=\frac{(3x^2-6x)(x-1)^3-3(x-1)^2(x^3-3x^2)}{(x-1)^6}=$$

$$=\frac{x(x-1)^2[(3x-6)(x-1)-3(x^2-3x)]}{(x-1)^6}=\frac{3x[(x-2)(x-1)-(x^2-3x)]}{(x-1)^4}=\frac{3x[2]}{(x-1)^4}=\frac{6x}{(x-1)^4}$$

לכן יש 3 נקודות חשודות עבור 'f הנקודות 0,1,3 ו-אחת עבור "f הנקודה 0. נציב נציגים ונקבל כי f יורדת בקטע [1,3] ועולה בכל קטע אחר, שf קעורה עבור x שלילי וקמורה עבור חיובי. לכן 3 היא נקודת מינימום מקומי ו-0 נקודת פתול.

זוגיות

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x-1)^2}=\frac{-x^3}{(x+1)^2}\neq \pm f$$

רואים כי יש אסימפטוטה אנכית ב-x=1. נחשב אסימפטוטה משופעת:

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{(x-1)^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x-1)^2}=1,\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{(x-1)^2}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x(x-1)^2}{(x-1)^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{(x-1)^2}=2, y=x+2$$

ישר זה הוא ישר אסימפטוטה משופעת ב- $\pm\infty$.