

המכללה האקדמית נתניה

מבחן דוגמא במתמטיקה א' – מנהל עסקים

שם המרצה:

תאריך הבחינה:

משך הבחינה: שעתיים וחצי

חומר עזר: מחשבון (לא גרפי).

חלק א' ייבדק רק לפי התשובות הסופיות שיופיעו על טופס הבחינה. חלק ב' ייבדק לפי המחברת.

חלק א.

1. חשב שניים משלושת הגבולות הבאים:
(20%)

א:
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 6x + 3}{-3x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 10x + 5}$$

א. $-\frac{2}{3}$

ב. 0

ג. $\frac{5}{2}$

ד. 10

ה. אף אחת מהתשובות האחרות איננה נכונה.

ב:
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - 11x + 13}{3x^2 - 11x + 7} \right)^{5x - 2x^2}$$

א. 1

ב. e^{-4}

ג. e^3

ד. e^{-3}

ה. אף אחת מהתשובות האחרות איננה נכונה.

ג:
$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3x}} \right)$$

א. 2

- ב. -2
ג. 0.5
ד. 0

ה. אף אחת מהתשובות האחרות איננה נכונה.

2. מצא את הפונקציה הפוכה לפונקציה $y = \frac{3x+1}{3x-1}$ (7%)

3. מצא את המינימום והמקסימום המוחלטים (גלובלים) של $f(x) = (1 - \ln x)^2$ בקטע $[1, e^3]$. (7%)

4. נתונות הפונקציות: $f(x) = (x^2 - 3x + 7)^3$ ו $g(x) = \frac{3x}{\sqrt{5x-1}}$. (7%)

חשב את: $f(g(x))$ ואת $g(f(x))$.

$$f(g(x)) =$$

5. על כל אחת מהשאלות הבאות יש לענות רק "כן" או "לא". משקל של כל אחת מהשאלות שווה ל 3 נקודות.

א: הפונקציה $y = \frac{x}{x^2+1}$ היא פונקציה אי-זוגית.

כן	לא

ב: הפונקציה $y = 2 - \frac{1}{x}$ היא חד-חד-ערכית

כן	לא

ג. הפונקציה $y = \frac{\pi}{x+1}$ היא פונקציה רציונאלית.

כן	לא

חלק ב'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על כל אחת מהשאלות הבאות:

6. ענה על אחד משני הסעיפים הבאים:
(20%)

א: עבור אילו ערכי a ו b הפונקציה הבאה תהיה רציפה לכל x .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{ax^2 + bx + 4} - 2}{x} & x > 0 \\ \frac{6}{2b} & x = 0 \\ a + e^{\frac{3}{x}} & x < 0 \end{cases}$$

ב: חברה מוכרת כל יום 100 מוצרים במחיר 40 ₪ למוצר. על כל הורדה של שקל אחד ממחיר המוצר, החברה מוכרת 4 מוצרים יותר ליום. חשב מה צריך להיות מחיר המוצר כדי שההכנסה היומית תהיה מקסימלית. רמז: סמן ב- x את מספר המוצרים הנוספים ליום.

7. נתונה הפונקציה:
 $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$
(30%)

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א: תחום הגדרה

ב: נקודות חיתוך עם הצירים.

ג: תחומי עליה וירידה.

ד: נקודות קיצון.

ה: נקודות פיתול, תחומי קמירות וקעירות.

- ו: זוגיות/אי-זוגיות הפונקציה.
 ז: אסימפטוטות אנכיות ומשופעות.
 ח: שרטט את גרף הפונקציה.

בהצלחה!!!

פתרונות לשאלות המבחן

שאלה א-1

לכן אפשר ללפטל את הבטוי ולקבל:
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 6x + 3}{-3x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 10x + 5} = \frac{2 - 4 + 5 - 6 + 3}{-3 + 6 + 2 - 10 + 5} = \frac{0}{0}$$

שאלה ב-1

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 6x + 3}{-3x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 10x + 5} \square \lim_{x \rightarrow 1} \frac{8x^3 - 12x^2 + 10x - 6}{-12x^3 + 18x^2 + 4x - 10} = \frac{0}{0} \square \lim_{x \rightarrow 1} \frac{24x^2 - 24x + 10}{-36x^2 + 36x + 4} = \frac{10}{4}$$

נביט על הגבול של הבסיס:
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - 11x + 13}{3x^2 - 11x + 7} \right)^{5x - 2x^2}$$

ועל הגבול של המעריך:
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 11x + 13}{3x^2 - 11x + 7} = \frac{\infty}{\infty} \square \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x - 11}{6x - 11} = \frac{1}{1} = 1$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} 5x - 2x^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} x(5 - 2x) = \infty \cdot (-\infty) = -\infty$. לכן זהו גבול מהצורה של 1^∞ ולכן
נשתמש בהגדרה של אוילר ונקבל:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - 11x + 13}{3x^2 - 11x + 7} \right)^{5x - 2x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - 11x + 7 + 6}{3x^2 - 11x + 7} \right)^{5x - 2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6}{3x^2 - 11x + 7} \right)^{5x - 2x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6}{3x^2 - 11x + 7} \right)^{\frac{3x^2 - 11x + 7}{6} (5x - 2x^2) \frac{6}{3x^2 - 11x + 7}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6(5x - 2x^2)}{3x^2 - 11x + 7}} = e^{-4} \end{aligned}$$

שאלה 1-ג

ולכן נעשה מכנה משותף $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3x}} \right) = \infty \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty} \right) = \infty(0 - 0) = \infty 0$
ואחר כך נכפל ונחלק בצמוד.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3x}} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + x}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2 + x}} - \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2 + 3x}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{1 + \frac{3}{x}} \right) = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

תשובה 2

$$\begin{aligned} y = \frac{3x+1}{3x-1} \quad \text{תחום הגדרה } R - \{1/3\} \quad \text{נקבל} \\ y(3x-1) = 3x+1 \rightarrow 3xy - y = 3x+1 \rightarrow 3xy - 3x = y+1 \rightarrow 3x(y-1) = y+1 \\ \rightarrow x = \frac{y+1}{3(y-1)} \rightarrow y = \frac{x+1}{3(x-1)} \end{aligned}$$

$$y = \frac{x+1}{3(x-1)} : R - \{1\} \rightarrow R - \{1/3\} \quad \text{לכן הפונקציה ההפוכה היא}$$

תשובה 3

נביט על $f(x) = (1 - \ln x)^2$ נגזור אותה $f'(x) = \frac{-2(1 - \ln x)}{x}$. הנגזרת מתאפסת

בנקודה שם $\ln x = 1$ או בנקודה $x = e$. הנגזרת לא מוגדרת בנקודה $x = 0$, אך נקודה זו טיננה בתחום הנתון. בנוסף יש לצרף לנקודות החשודות את קצות הקטע. לכן סך הכל יש לנו 3 נקודות חשודות: $x = 1, e, e^3$. נקודות אלו יש להציב בפונקציית המקור, ונקבל בהתאמה $f(x) = 1, 0, 4$. לכן המקסימום המוחלט בתחום מתקבל בנקודה $(x = e^3, y = 4)$ והמינימום המוחלט מתקבל בנקודה $(x = 1, y = 0)$.

תשובה 4

$$g(f(x)) = \frac{3f(x)}{\sqrt{5f(x)-1}} = \frac{3((x^2-3x+7)^3)}{\sqrt{5((x^2-3x+7)^3)-1}},$$

$$f(g(x)) = (g(x)^2 - 3g(x) + 7)^3 = \left(\left(\frac{3x}{\sqrt{5x-1}}\right)^2 - 3\frac{3x}{\sqrt{5x-1}} + 7\right)^3 =$$

תשובה 5-א

. תחום ההגדרה הוא כל \mathbb{R} , וזהו תחום סימטרי סביב הראשית. בנוסף מתקיים: $y = \frac{x}{x^2+1}$

$$f(-x) = \frac{(-x)}{(-x)^2+1} = \frac{-x}{x^2+1} = -f(x)$$

כלומר אכן f היא פונקציה אי זוגית.

תשובה 5-ב

$$y = 2 - \frac{1}{x} \text{ אז } a = b \rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{b} \rightarrow -\frac{1}{a} = -\frac{1}{b} \rightarrow 2 - \frac{1}{a} = 2 - \frac{1}{b} = f(b) = f(a) \text{ ולכן } f$$

חז"ע.

תשובה 5-ג

$y = \frac{\pi}{x+1}$ היא אכן מנה של שני פולינומים. המכנה הוא פולינום ממעלה 1, והמונה הוא פולינום ממעלה 0 כלומר קבוע, ולכן המנה היא פונקציה רציונלית.

תשובה 6 א

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{ax^2 + bx + 4} - 2}{x} & x > 0 \\ 6 & x = 0 \\ \frac{2b}{a + e^{\frac{3}{x}}} & x < 0 \end{cases}$$

נחשב את הגבולות החד צדדיים ב $x=0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2b}{a + e^{\frac{3}{x}}} = ?, \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{x} = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{3}{x}} = e^{-\infty} = 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2b}{a + e^{\frac{3}{x}}} = \frac{2b}{a+0} = \frac{2b}{a}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{ax^2 + bx + 4} - 2}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{ax^2 + bx + 4} - 2)(\sqrt{ax^2 + bx + 4} + 2)}{x(\sqrt{ax^2 + bx + 4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax^2 + bx + 4 - 4}{x(\sqrt{ax^2 + bx + 4} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax^2 + bx}{x(\sqrt{ax^2 + bx + 4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(ax + b)}{x(\sqrt{ax^2 + bx + 4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + 4} + 2} = \frac{b}{4} \end{aligned}$$

ולכן כדי שתהיה רציפות צריכים להתקיים השוויונים $\frac{b}{4} = \frac{2b}{a} = 6$ ופתרוןם $b=24, a=8$

תשובה 6-ב

נסמן את מספר המוצרים הנוספים ב- x ולכל מוצר נוסף יורד המחיר ברבע שקל, ולכן ל- x מוצרים נוספים יורד המחיר ב- $0.25x$ ולכן הפדיון החדש הוא $(100+x)(40-0.25x)$. מספר המוצרים הנוספים חייב להיות גדול מ-100 שאומר כי החברה לא מוכרת אף מוצר, ולא יכול להתקיים כי מחיר המוצר שלילי, ולכן $40-0.25x$ חייב להיות אי שלילי, כלומר מספר המוצרים לא יכול לעבור את 160. ולכן קבלנו בעיה: מצא מקסימום לפונקציה $4000+15x-0.25x^2$ בקטע $[-100,160]$. נגזר ונקבל כי הנגזרת היא $15-0.5x$ אשר מתאפסת ב- $x=30$. לכן יש לנו 3 נקודות חשודות $x=-100, 30, 160$. נקודות אלו נציב בפונקצית הפדיון, ונקבל 3 ערכי y בהתאמה $0, 4225, 0$ ולכן ברור כי $x=30, y=4225$ הוא הערך של מירב הפדיון.

תשובה 7

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$$

ת.ה. אסור למכנה להיות 0, ולכן
 $(x+1)^2 \neq 0 \rightarrow (x+1) \neq 0 \rightarrow x \neq -1 \rightarrow f(x): R - \{-1\} \rightarrow R$

זוגיות ואי זוגיות: כיון שת.ה. איננו סימטרי סביב הראשית, אי אפשר להגדיר זוגיות אי זוגיות, וזו פונקציה כללית.

חתוך עם הצירים: $x=0 \rightarrow y = \frac{-3}{1^2} = -3, y=0 \rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow x = 1, -3.$
 $(0, -3)(1, 0), (-3, 0).$

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2+2x-3)}{(x+1)^4} = \frac{(2x+2)[(x+1)^2 - (x^2+2x-3)]}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{2[x^2+2x+1-x^2-2x+3]}{(x+1)^3} = \frac{8}{(x+1)^3} = 8(x+1)^{-3}, f''(x) = -24(x+1)^{-4} = \frac{-24}{(x+1)^4}$$

לכן הנקודה היחידה שם משתנות f', f'' היא $x=-1$. נבחר נציגים, אחד מימין לנקודה זו ואחת משמאלה. אז בקרן שמימין לנקודה זו, f עולה ובוכה, ומשמאל לה f יורדת ובוכה.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} = \frac{-4}{0^+} = -\infty, \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

אסימפטוטה אנכית: $\pm\infty$ מודהה, ולכן נבדק רק צד אחד.

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{x(x+1)^2} = 0, b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} - 0x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} = 1, y = 1$$

ולכן יש לנו אסימפטוטה אפקית.