

בס"ד יום חמישי יז שבט התשס"ח 24 ינואר 2008

בחנית סוף בקורס מבוא לטופולוגיה אלגברית 88-520-01

אוניברסיטת בר אילן, המחלקה למתמטיקה, סמסטר סתו התשס"ח.

מועד א. המורה: גיורא דולה. משך המבחן שעתים וחצי.

ענה/י על כל התשובות במחברת הבחינה. נמקי/י כל שלב בטעוניהם שלך.

### בהצלחה

ענה/י על שלש מתוך ארבעת השאלות הבאות. משקל כל שאלה 17 נקודות.

שאלה ראשונה

נתונה הכלה בין מרחבים טופולוגיים  $X \subset Y$  ונתונה נקודת בסיס  $a \in X \subset Y$ , ונתון כי חבורת ההומוטופיה הראשונה  $\pi_1(Y, a)$  היא חבורה סופית. האם מכאן נובע כי חבורת ההומוטופיה הראשונה  $\pi_1(X, a)$  היא חבורה סופית?

שאלה שניה

נתונה הכלה בין מרחבים טופולוגיים  $i: X \subset Y$ , נתון כי  $X$  הוא רכוז של  $Y$ , כלומר קימת  $r: Y \rightarrow X$  רציפה כך ש  $ri=I_X$  ונתון כי  $Y$  הוא פשוט קשר. האם מכאן נובע כי  $X$  הוא פשוט קשר?

שאלה שלישית

תן/י פרוק סימפלקציאלי או פרוק CW של מרחב טופולוגי  $X$  המקיים כי  $\pi_1(X, a) = \mathbf{Z}_3$

שאלה רביעית

נתונות העתקות רציפות  $f: S^n \rightarrow S^n, g: S^n \rightarrow S^n$  בעלות התכונה כי לכל  $x$  בתחום,  $f(x) \neq -g(x)$ . הוכח/י כי נובע כי שתי ההעתקות הן הומוטופיות זו לזו.

ענה/י על שתיים מתוך שלשת השאלות הבאות. משקל כל שאלה 25 נקודות.

שאלה חמישית

חשב/י את  $\pi_1(T^n), T^n = T \# T \# \dots \# T$  תוך הסתמכות על משפטים שהוכחו בכתה.

שאלה שישית

נסח/י והוכח/י את משפט Seifert Van-Kampen.

שאלה שביעית

נסח/י כלל השקול לעובדה כי בדיאגרמה

$$\begin{array}{ccc} & & (E, e) \\ & & p \downarrow \\ (X, x) & \xrightarrow{f} & (B, b) \end{array}$$

יש ל- $f$  הרמה דרך  $p$ , כאשר  $p$  היא הטלת כסוי, ו- $X$  קשיר מסילתית וקשיר מסילתית מקומית. הוכח/י את השקילות.

תשובות לשאלות הראשונות

תשובה ראשונה: לא

למשל  $S^1 \subset e^2$ . אז חבורת ההומוטופיה של המרחב הקטן היא חבורת השלמים והיא אינסופית ולעומתה החבורה של המרחב הגדול היא אפס.

תשובה שניה: כן.

הדיאגרמה של הרכוז נשמרת על ידי הפעלת הפונקטור של חבורת ההומוטופיה הראשונה, ולכן,  $\pi_1(X, a)$  היא חבורה חלקית של  $\pi_1(Y, a) = 0$ .

תשובה שלישית

המרחב דומה למישור פרויקטיבי מכיל תא 0 ממדיית תא 1 ממדי ותא 2 ממדיית ושפת התא הדו ממדי מועתקת לתא החד ממדי ע"י ההעתקה  $z \rightarrow z^3$ .

תשובה רביעית

נגדיר הומוטופיה רציפה בין  $f$  ובין  $g$  על ידי  $F(s, t) = \frac{tf(s) + (1-t)g(s)}{|tf(s) + (1-t)g(s)|}$ ,  $s \in S^n, t \in [0, 1]$ . המונה הוא קטע המקשר בין תמונת  $f$  ותמונת  $g$ . לפי ההנחה הקטע לא עובר דרך ה-0 ולכן ניתן לחלק בנורמה שלו ולקבל העתקה לתוך  $S^n$  זוהי ההומוטופיה הרצויה בין  $f$  ובין  $g$ .