המכללה האקדמית נתניה

מבחן אמצע סמסטר אינפי א'

יום ב ל כסלו התשע"ב 26-12-2011

שם המרצה: ד"ר גיורא דולה
זמן המבחן: שעה וחצי
חומר עזר: מחשבון

<u>ענה על השאלות הבאות:</u>

1. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה הבאה: (15%)

$$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{-x^2+6x+7}}+\sqrt{2x^2-10x+8}$$

2. בדוק האם הפונקציה הבאה חד חד ערכית. נמק. (15%)

$$f(x)=\frac{7x}{x-6}+3x$$

3. מצא במידה וקיים: סופרמום, אינפימום, מקסימום ומינימום של הקבוצה הבאה: (20%)

$$\left\{\frac{(4n+1)(-1)^n}{2n+7}-(-1)^n, n\in N\right\}$$

4. בדוק את זוגיות\אי-זוגיות הפונקציה הבאה: (10%)

$$f(x)=(4x^2+7x-7)^{\frac{3}{5}}-(4x^2-7x-7)^{\frac{3}{5}}$$

5. חשב שניים משלושת הגבולות הבאים: (30%)

א. $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(n+1)!}+2\cdot\sqrt{n!}}{(6\sqrt{n}+1)\sqrt{n!}}$$

ב. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-7n+8}{2n^2-9n-6}\right)^{7n-2}$

ג.

$$\lim_{n\to\infty} n^2\cdot\left\lfloor\sqrt{4n^2+7}-\sqrt{4n^2-3}\right\rfloor$$

$[x]$ - הערך השלם של X .

6. נסח והוכח את משפט הסנדביץ'. (10%)

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\quad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),\, a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$) הוא $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$a^xa^y=a^{x+y},(ab)^x=a^xb^x,\sqrt[x]{a}=a^{\frac{1}{x}},\sqrt[x]{a^y}=a^{\frac{y}{x}},$$
$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x},\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}=\frac{b^x}{a^x},a^0=1,$$
$$\left(a^x\right)^y=a^{xy},a^{-x}=\frac{1}{a^x},\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x=y\Leftrightarrow a^y=x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x > 0$ ו $0 < a, a \neq 1$.

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \qquad \log_a x^y = y \cdot \log_a x;$$

$$\log_a (x / y) = \log_a x - \log_a y, \qquad \log_a \sqrt[y]{x} = \tfrac{1}{y} \cdot \log_a x;$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \qquad \log_a x = \frac{1}{\log_x a};$$

$$a^{\log_a x} = x, \qquad \ln x = \log_e x, e = 2.718281828...$$

$$\ln x = a \Rightarrow x = e^a$$

5.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0: $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$\left(x^a\right)' = ax^{a-1}, \qquad (a^x)' = \ln a \cdot a^x;$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (e^x)' = e^x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x);$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

$$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx = C;$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C;$$

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, a \neq -1;$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C;$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin(\frac{x}{a}) + C;$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח : $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V=\pi\int_a^b (g^2(x)-f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V=2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

11.

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right), \qquad \sin^2 x+\cos^2 x=1;$$

$$\tan x=\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right), \qquad \tan x\cdot\cot x=1;$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}, \qquad 1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)\pm\cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan(\alpha)\pm\tan(\beta)}{1\mp\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.$$

$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}.$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

:

$$\tan^2(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$

$$\sin(\alpha)-\sin(\beta) = 2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$

:

$$\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$

$$\cos(\alpha)-\cos(\beta) = -2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

:

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

פתרונות

1. ענה על אחת משני הסעיפים הבאים : (20%)

א: מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה הבאה:

$$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{-x^2+6x+7}}+\sqrt{2x^2-10x+8}$$

כדי ש f תהיה מוגדרת צריך להתקיים $(0<-x^2+6x+7)\wedge(0\le 2x^2-10x+8)$
נפתור כל אי שויון לחוד.

$$0<-x^2+6x+7,\ x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-6\pm\sqrt{36+28}}{2(-1)}=\frac{-6\pm 8}{-2}=-1,7,\{x,-1<x<7\}$$

וכמו כן

$$0\le 2x^2-10x+8,\ x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{10\pm\sqrt{100-64}}{2(2)}=\frac{10\pm 6}{4}=1,4,\{x,1\le x\le 4\}$$

וכעת נקבל על ידי חתוך את תחום ההגדרה $\{x,1\le x<4\}$

2. בדוק האם הפונקציה הבאה חד חד ערכית. נמק.

$$f(x)=\frac{7x}{x-6}+3x,\ f(a)=f(b)\rightarrow\frac{7a}{a-6}+3a=\frac{7b}{b-6}+3b\rightarrow 3a-3b+\frac{7a}{a-6}-\frac{7b}{b-6}=0\rightarrow$$

$$3(a-b)+\frac{42(b-a)}{(a-6)(b-6)}=0\rightarrow 3(b-a)[-1+\frac{14}{(a-6)(b-6)}]=0\rightarrow 3(b-a)\frac{14-(a-6)(b-6)}{(a-6)(b-6)}=0$$

$$\rightarrow 3(b-a)\frac{-ab+6a+6b-22}{(a-6)(b-6)}=0\rightarrow\frac{3(b-a)(-ab+6a+6b-22)}{(a-6)(b-6)}=0.$$

ולכן עבור $-ab+6a+6b-22=0$ נקבל עוד פתרון. נפתר ונקבל
$-ab+6a+6b-22=0\rightarrow a(6-b)=22-6b\rightarrow a=\frac{22-6b}{6-b}$ למשל עבור b=5,a=-8 אכן
מקבלים אותו y=-20, כלומר f איננה חח״ע.

3. מצא במידה וקיים: סופרמום, אינפימום, מקסימום ומינימום של הקבוצה הבאה: (20%)

$$\frac{(4n+1)(-1)^n}{2n+7}-(-1)^n=(-1)^n(\frac{(4n+1)}{2n+7}-1)=(-1)^n\frac{2n-6}{2n+7}=(-1)^n(\frac{2n-6}{2n+7}-1+1)=$$

$$(-1)^n(\frac{-13}{2n+7}+1).$$

הסדרה -13/(2n+7) שלילית ועולה, ולכן ההפרש 1-13/(2n+7) היא עולה,
שני ערכיה הראשונים הם -4/9,-2/11 ערכה השלישי 0, וערכיה הבאים
עולים ומתכנסים ל-1. תת סדרת האיברים בעלי מקום איזוגי היא תת

סדרה אשר יורדת ל 1-, והאיברים בעלי מקום זוגי עולה ל-1, ואלו הם החסמים התחתון והעליון 1.5 שלה בהתאמה.

4. בדוק את זוגיות\אי-זוגיות הפונקציה הבאה: (15%)

$$f(x) = (4x^2+7x-7)^{\frac{3}{5}} - (4x^2-7x-7)^{\frac{3}{5}}$$

כיון ששורש חמישי מוגדר לכל x, הרי שתחום ההגדרה של f הוא $\mathbb{R}$, והוא סימטרי, ובנוסף מתקיים

$$f(-x) = \sqrt[5]{(4(-x)^2+7(-x)-7)^3} - \sqrt[5]{(4(-x)^2-7(-x)-7)^3} = \sqrt[5]{(4x^2-7x-7)^3} - \sqrt[5]{(4x^2+7x-7)^3} = -f(x)$$

כלומר הפונקציה היא איזוגית.

5. חשב שניים משלושת הגבולות הבאים: (30%)

א. . נשתמש בזהויות

$$\frac{\sqrt{(n+1)!}+2\cdot\sqrt{n!}}{(6\sqrt{n}+1)\sqrt{n!}} = \frac{\sqrt{n!}(\sqrt{n+1}+2)}{(6\sqrt{n}+1)\sqrt{n!}} = \frac{\sqrt{n+1}+2}{6\sqrt{n}+1} = \frac{\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}+\frac{2}{\sqrt{n}}}{6+\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\frac{2}{\sqrt{n}}}{6+\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\frac{2}{\sqrt{n}}}{6+\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

ולכן $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(n+1)!}+2\cdot\sqrt{n!}}{(6\sqrt{n}+1)\sqrt{n!}} = \frac{1+0}{6+0} = \frac{1}{6}$

ב.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-7n+8}{2n^2-9n-6}\right)^{7n-2}, \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-7n+8}{2n^2-9n-6} = \infty, \lim_{n\to\infty} 7n-2 = \infty, \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-7n+8}{2n^2-9n-6}\right)^{7n-2} = \infty^\infty = \infty.$$

ג.

$$\sqrt{4n^2+7} - \sqrt{4n^2-3} = \frac{(\sqrt{4n^2+7}-\sqrt{4n^2-3})(\sqrt{4n^2+7}+\sqrt{4n^2-3})}{\sqrt{4n^2+7}+\sqrt{4n^2-3}} = \frac{10}{\sqrt{4n^2+7}+\sqrt{4n^2-3}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{4n^2+7} - \sqrt{4n^2-3} = 0.$$

לכן הסדרה $\sqrt{4n^2+7}-\sqrt{4n^2-3}$ הופכת להיות החל ממקום מסוים בעלת איברים בין 0 ו-1, ולכן החל מאותו מקום הסדרה $[\sqrt{4n^2+7}-\sqrt{4n^2-3}]$ היא הסדרה הקבועה 0, וכך גם הסדרה $n^2\cdot\left[\sqrt{4n^2+7}-\sqrt{4n^2-3}\right]$ ולכן גם הגבול שלה הוא 0.