המכללה האקדמית נתניה

מבחן באינפי א' מועד א'

שם המרצה: ד"ר גיורא דולה
תאריך הבחינה: יום ה, כב שבט התשע"א, 27-1-2011
משך הבחינה: <u>שעתיים וחצי</u>
חומר עזר: מחשבון (לא גרפי).
<u>ענה על כל השאלות הבאות:</u>

1. א. נסח <u>והוכח</u> את משפט ערך הממוצע של לגרנז. (30%)

ב. הוכח כי לכל $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ מתקיים:

$$\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha}<\tan\beta-\tan\alpha<\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}$$

2. חשב שניים משלושת הגבולות הבאים: (20%)

א: $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2})$

ב: $\lim_{x\to\infty} x\cdot(\sqrt[x]{5}-1)$

ג: $\lim_{x\to+\infty}(\frac{3x-5\sqrt{x}+4}{3x-2\sqrt{x}-5})^{6\sqrt{x}+3}$

3. על כל אחת מהשאלות הבאות יש לענות "נכון" או "לא נכון" ולנמק נמוק קצר. הנמוק הקצר יכול להיות דוגמא נגדית. את התשובה יש לכתוב בשאלון. (21%)

א: אם הסידרות $\{a_n^2-b_n^2\}$ ו $\{a_n^2+b_n^2\}$ מתכנסות אזי הסדרות: a_n ו b_n מתכנסות בהכרח.

נכון   לא נכון

נמוק קצר.

ב. $\lim_{x\to\infty}(3^x+5^x)^{\frac{1}{x}}=e^5$

נכון   לא נכון

נמוק קצר.

ג. לפולינום $-5x^6+20x^5+13x^2-3$ יש לפחות שני שורשים ממשיים.

נכון   לא נכון

נמוק קצר.

4. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{(x-1)^3}{x^2}$ (30%)

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א: תחום הגדרה

ב: נקודות חיתוך עם הצירים.

ג: זוגיות/אי-זוגיות הפונקציה.

ד: תחומי עליה וירידה ונקודות קריטיות.

ה: נקודות קיצון.

ו: נקודות פיתול, תחומי קמירות וקעירות.

ז: אסימפטוטות אנכיות ומשופעות.

ח: שרטט את גרף הפונקציה.

בהצלחה!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\quad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2), a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ הוא $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$a^x a^y=a^{x+y},(ab)^x=a^x b^x,\sqrt[x]{a}=a^{\frac{1}{x}},\sqrt[x]{a^y}=a^{\frac{y}{x}},$$

$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x},\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}=\frac{b^x}{a^x},a^0=1,$$

$$\left(a^x\right)^y=a^{xy},a^{-x}=\frac{1}{a^x},\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x=y\Leftrightarrow a^y=x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x>0$ ו $0<a,a\neq 1$.

$$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y,\qquad \log_a x^y=y\cdot\log_a x;$$

$$\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y,\qquad \log_a\sqrt[y]{x}=\tfrac{1}{y}\cdot\log_a x;$$

$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a},\qquad \log_a x=\frac{1}{\log_x a};$$

$$a^{\log_a x}=x,\qquad \ln x=\log_e x,e=2.718281828...$$

$$\ln x=a\Rightarrow x=e^a$$

5.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0: $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$\left(x^a\right)'=ax^{a-1},\qquad (a^x)'=\ln a\cdot a^x;$$

$$(\sin x)'=\cos x,\qquad (e^x)'=e^x;$$

$$(\cos x)'=-\sin x,\qquad (\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a};$$

$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\qquad (\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x);$$
$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$
$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$
$$.(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$
$$(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx = C;$$
$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C;$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$
$$\int e^x dx = e^x + C;$$
$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C;$$
$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, a \neq -1;$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C;$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin(\frac{x}{a}) + C;$$
$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$
$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$
$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח : $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V = \pi\int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$

.11

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \tan x \cdot \cot x = 1;$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$
$$\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha).$$
$$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.$$
$$\cot(2\alpha)=\frac{\cot^2(\alpha)-1}{2\cot(\alpha)}.$$
$$\sin^2(\alpha)=\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\cos^2(\alpha)=\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.$$
$$\sin(\frac{\alpha}{2})=\pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\cos(\frac{\alpha}{2})=\pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}.$$
$$\tan(\frac{\alpha}{2})=\frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}=\frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$
:
$$\tan^2(\frac{\alpha}{2})=\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta)=2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\sin(\alpha)-\sin(\beta)=2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).$$
:
$$\cos(\alpha)+\cos(\beta)=2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
$$\cos(\alpha)-\cos(\beta)=-2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
$$\cos(\alpha)\sin(\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$
:
$$\cos(\alpha)\cos(\beta)=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$
$$\sin(\alpha)\sin(\beta)=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

תשובות

1-ב נפעיל את משפט ערך הבינים של לגרנג' עבור הפונקציה $f(x)=\tan(x)$
בקטע [α,β] עבור α,β המקיימים 0<α<β<π/2 . אז מתקיים
$\frac{\tan(\beta)-\tan(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{1}{\cos^2(c)}$ עבור c המקיים α<c<β. הפונקציה cos(x)
חיובית ויורדת בקטע [0,π/2] ולכן $\cos^2(x)$ גם היא חיובית ויורדת, ו
$1/\cos^2(x)$ חיובית ועולה. לכן α<c<β גורר כי
$1/\cos^2(\alpha)< 1/\cos^2(c)< 1/\cos^2(\beta)$ ולכן
$\frac{1}{\cos^2(\alpha)}\le\frac{\tan(\beta)-\tan(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{1}{\cos^2(c)}\le\frac{1}{\cos^2(\beta)}$. נכפול בבטוי החיובי β- α
ונקבל $\frac{\beta-\alpha}{\cos^2(\alpha)}\le\tan(\beta)-\tan(\alpha)\le\frac{\beta-\alpha}{\cos^2(\beta)}$ כדרוש.

2-א:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=?,\ \frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x},\ \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\frac{0}{0}=$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2x-2\sin x\cos x}{2x\sin^2 x+2x^2\sin x\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{2x-\sin 2x}{2x\sin^2 x+x^2\sin 2x}=$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2-2\cos 2x}{2\sin^2 x+4x\sin x\cos x+2x\sin 2x+2x^2\cos 2x}=\lim_{x\to0}\frac{2-2\cos 2x}{2\sin^2 x+4x\sin 2x+2x^2\cos 2x}=\frac{0}{0}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{4\sin 2x}{4\sin x\cos x+4\sin 2x+8x\cos 2x+4x\cos 2x-4x^2\sin 2x}=$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{4\sin 2x}{6\sin 2x+12x\cos 2x-4x^2\sin 2x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to0}\frac{8\cos 2x}{12\cos 2x+12\cos 2x-16x\sin 2x-8x\sin 2x-8x^2\cos 2x}=$$
$$=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$$

פתרון נוסף קל יותר

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=?,\ \frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x},\ \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4(\sin^2 x/x^2)}=$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(x-\sin x)(x+\sin x)}{x^4(\sin^2 x/x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{(x-\sin x)}{x^3}\lim_{x\to0}\frac{(x+\sin x)}{x}\left(\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\right)^2$$

וכעת נחשב כל תת תרגיל בנפרד

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{6}$$
$$\lim_{x\to0}\frac{x+\sin x}{x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to0}\frac{1+\cos x}{1}=2$$
$$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{1}=1$$

ולכן בסה"כ

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)(x+\sin x)}{x^4(\sin^2 x/x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)}{x^3}\lim_{x\to 0}\frac{(x+\sin x)}{x}(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x})^2=\frac{1}{6}2\cdot 1^2=\frac{1}{3}$$

ב :

$$\lim_{x\to\infty}x\cdot(\sqrt[x]{5}-1).x\cdot(\sqrt[x]{5}-1)=\frac{(\sqrt[x]{5}-1)}{1/x}=\frac{5^{1/x}-1}{1/x},(y=\frac{1}{x}),x\cdot(\sqrt[x]{5}-1)=\frac{5^y-1}{y}.\lim_{x\to\infty}x\cdot(\sqrt[x]{5}-1)=\lim_{y=\frac{1}{x}\to 0+}\frac{5^y-1}{y}=$$

$$=\lim_{y=\frac{1}{x}\to 0+}\frac{5^y\ln 5}{1}=\ln 5.$$

ג :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-5\sqrt{x}+4}{3x-2\sqrt{x}-5}\right)^{6\sqrt{x}+3},(f(x)-1)g(x)=\left(\frac{3x-5\sqrt{x}+4}{3x-2\sqrt{x}-5}-1\right)(6\sqrt{x}+3)=\frac{(-3\sqrt{x}+9)(6\sqrt{x}+3)}{3x-2\sqrt{x}-5}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-1)g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(-3\sqrt{x}+9)(6\sqrt{x}+3)}{3x-2\sqrt{x}-5}=-6.\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-5\sqrt{x}+4}{3x-2\sqrt{x}-5}\right)^{6\sqrt{x}+3}=e^{-6}$$

3. על כל אחת מהשאלות הבאות יש לענות "נכון" או "לא נכון" ולנמק נמוק קצר. הנמוק הקצר יכול להיות דוגמא נגדית. את התשובה יש לכתוב בשאלון. (21%)

א : אם הסידרות $\{a_n^2-b_n^2\}$ ו $\{a_n^2+b_n^2\}$ מתכנסות אזי הסדרות : a_n ו b_n מתכנסות בהכרח.

תשובה : לא נכון . כיון ש $\{a_n^2-b_n^2\}$ ו $\{a_n^2+b_n^2\}$ מתכנסות אז סכומן שהוא $2a_n^2$ היא סדרה מתכנסת , ולכן גם a_n^2 מתכנסת. בצורה דומה גם הפרשן שהוא $2b_n^2$ היא סדרה מתכנסת , ולכן גם b_n^2 מתכנסת. אבל יתכן מצב שבו a_n,b_n אינן מתכנסות, למרות שרבועיהן מתכנסים, למשל במקרה ו $a_n=b_n=(-1)^n$.

ב. $\lim_{x\to\infty}(3^x+5^x)^{\frac{1}{x}}=e^5$

לא, כיון ש

$$\lim_{x\to\infty}(3^x+5^x)^{\frac{1}{x}}=e^5, 5^x\le 3^x+5^x\le 5^x+5^x=2\cdot 5^x\to(5^x)^{\frac{1}{x}}\le(3^x+5^x)^{\frac{1}{x}}\le(2\cdot 5^x)^{\frac{1}{x}}=(2)^{\frac{1}{x}}(5^x)^{\frac{1}{x}}\to$$

$$5\le(3^x+5^x)^{\frac{1}{x}}\le(2)^{\frac{1}{x}}5, \lim_{x\to\infty}(2)^{\frac{1}{x}}=2^0=1\to\lim_{x\to\infty}5\le\lim_{x\to\infty}(3^x+5^x)^{\frac{1}{x}}\le\lim_{x\to\infty}(2)^{\frac{1}{x}}5\to$$

$$5\le\lim_{x\to\infty}(3^x+5^x)^{\frac{1}{x}}\le 1\cdot 5\to\lim_{x\to\infty}(3^x+5^x)^{\frac{1}{x}}=5.$$

ג. לפולינום $-5x^6+20x^5+13x^2-3$ יש לפחות שני שורשים ממשיים.

נכון כי f(0)=-3,f(1)=25 ולכן יש שרש בין x=0,x=1. בנוסף

$$\lim_{x\to\infty}(-5x^6+20x^5+13x^2-3)=\lim_{x\to\infty}x^6(-5+20x^{-1}+13x^{-4}-3x^{-6})=\infty(-5+0+0+0)=-\infty$$

ולכן יש שרש בין x=1 ובין אינסוף.

4. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{(x-1)^3}{x^2}$ (30%)

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א: תחום הגדרה
ב: נקודות חיתוך עם הצירים.
ג: זוגיות/אי-זוגיות הפונקציה.
ד: תחומי עליה וירידה ונקודות קריטיות.
ה: נקודות קיצון.
ו: נקודות פיתול, תחומי קמירות וקעירות.
ז: אסימפטוטות אנכיות ומשופעות.
ח: שרטט את גרף הפונקציה.

תשובה:

א. ת"ה $\mathbb{R}-\{0\}$. ב. $y=0\to x=1$ ולכן נקודת חתוך יחידה היא (1,0).

ג. ת"ה הוא סימטרי ו $f(-x)=\frac{(-x-1)^3}{(-x)^2}=\frac{(x+1)^3}{x^2}$ ולכן זו פונקציה כללית. ד,ה,ו

$$f(x)=\frac{(x-1)^3}{x^2},\ f'(x)=\frac{3(x-1)^2x^2-2x(x-1)^3}{x^4}=\frac{x(x-1)^2[3x-2(x-1)]}{x^4}=\frac{(x-1)^2(x+2)}{x^3},$$

$$f''(x)=\frac{[2(x-1)(x+2)+(x-1)^2]x^3-3x^2(x-1)^2(x+2)}{x^6}=$$

$$=\frac{x^2(x-1)[(2(x+2)+(x-1))x-3(x-1)(x+2)]}{x^6}=\frac{(x-1)[(3x+3)x-3(x-1)(x+2)]}{x^4}=$$

$$=\frac{3(x-1)[x^2+x-x^2-x+2]}{x^4}=\frac{6(x-1)}{x^4}$$

נקודות קריטיות -2,0,1. נציגים -3,-1,0.5,2. נקבל את טבלת סימני הנגזרות.

	(-∞,-2)	(-2,0)	(0,1)	(1,∞)
סימן של y'	+	-	+	+
סימן של y''	-	-	-	+
התנהגות y	עולה ובוכה	יורדת ובוכה	עולה ובוכה	עולה ומחייכת

ולכן (-2,0.25) נקודת מקסימום מקומית, (1,0) נקודת פתול.
אסימפטוטות אנכיות רק אפשריות עבור x=0. מתקיים כי
$\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)^3}{x^2}=\frac{-1}{0+}=-\infty$ ולכן אכן x=0 ישר אסימפטוטה אנכית
אליו העקום נדבק משני הצדדים. עבור אסימפטוטה משופעת ב±∞ , נקבל

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^3}{x^3}=1,\ f(x)-ax=\frac{(x-1)^3-x^3}{x^2}=\frac{x^3-3x^2+3x-1-x^3}{x^2}=\frac{-3x^2+3x-1}{x^2},$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-3x^2+3x-1}{x^2}\right)=-3,\ y=1x-3=x-3$$

כלומר קבלנו ישר אסימפטוטה משופעת ב±∞ .