המכללה האקדמית נתניה

מבחן באינפי א' דוגמא

שם המרצה: ד"ר גיורא דולה
תאריך הבחינה: יום ו כא' טבת ה'תשע"ג 1-2-2013
משך הבחינה: <u>שעתיים וחצי</u>
חומר עזר: מחשבון (לא גרפי).
<u>ענה על כל השאלות הבאות:</u>

1. א. נסח <u>והוכח</u> את כלל הסנדביץ' לסדרות חיוביות. (25%)

ב. חשב את הגבול הבא: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1!+2!+3!\cdots+n!}{n^n}\right)$

2. חשב את שלושת הגבולות הבאים: (30%)

א: $\lim_{x\to\infty} x^2\cdot(\ln\sqrt{3x^2+4}-\ln\sqrt{3x^2-1})$

ב: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x-\tan x}{\cos x-\frac{1}{\cos x}}\right)$

ג: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{7x^2-3x+7}{7x-5\sqrt{x}-9}\right)^{7x-2}$

3. בדוק רציפות/ אי- רציפות של הפונקציה הבאה בנקודה $x=0$ (15%)

$$f(x)=\begin{cases}2x\sin(\frac{1}{x}) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

4. הוכח לפי הגדרת הנגזרת כי $(\ln(7x))'=\frac{1}{x}$. (10%)

5. הוכח כי למשוואה הבאה יש לפחות שני שורשים: (10%)

$$e^{-5x}+2e^{3x}+7x^4+8\sin(5x)+7x^2-4=0$$

6. הוכח כי כל פונקציה רציפה על קטע סגור היא חסומה מלרע. (10%)

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\quad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2), a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ הוא $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ב. פירוק הטרינום $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3. חזקות ושורשים

$$a^xa^y=a^{x+y},(ab)^x=a^xb^x,\sqrt[x]{a}=a^{\frac{1}{x}},\sqrt[x]{a^y}=a^{\frac{y}{x}},$$

$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x},\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}=\frac{b^x}{a^x},a^0=1,$$

$$\left(a^x\right)^y=a^{xy},a^{-x}=\frac{1}{a^x},\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה-log: $\log_a x=y\Leftrightarrow a^y=x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x>0$ ו $0<a,a\neq 1$.

$$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y,\qquad \log_a x^y=y\cdot\log_a x;$$

$$\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y,\qquad \log_a\sqrt[y]{x}=\tfrac{1}{y}\cdot\log_a x;$$

$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a},\qquad \log_a x=\frac{1}{\log_x a};$$

$$a^{\log_a x}=x,\qquad \ln x=\log_e x,e=2.718281828\ldots$$

$$\ln x=a\Rightarrow x=e^a$$

5.הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0: $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$(x^a)'=ax^{a-1}, \qquad (a^x)'=\ln a\cdot a^x;$$
$$(\sin x)'=\cos x, \qquad (e^x)'=e^x;$$
$$(\cos x)'=-\sin x, \qquad (\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a};$$
$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x};$$
$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a\cdot f(x))'=a\cdot f'(x);$$
$$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x);$$
$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x);$$
$$(f(x)g(x)h(x))'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x).$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$
$$(f(g(x))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

8. אינטגרלים מיידים

$$\int 0dx = C;$$
$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C;$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$
$$\int e^x dx = e^x + C;$$
$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C;$$
$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, a \neq -1;$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C;$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C;$$
$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \arctan x + C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$
$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx;$$
$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנסוח אחר:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

א.שטח : $S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

ב. שטח בקואורדינטות קטביות: $S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$

ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x: $V=\pi\int_a^b (g^2(x)-f^2(x))dx$

ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y: $V=2\pi\int_a^b xf(x)dx$

ה. אורך קו: $l=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

.11

א.הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right), \qquad \sin^2 x+\cos^2 x=1;$$

$$\tan x=\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right), \qquad \tan x\cdot\cot x=1;$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}, \qquad 1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)\pm\cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan(\alpha)\pm\tan(\beta)}{1\mp\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

:

$$\sin(2\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\alpha).$$

$$\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha).$$

$$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.$$

$$\cot(2\alpha)=\frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$$

פתרונות

1-ב נביט בסדרה $\frac{1!+2!+3!\cdots+n!}{n^n}$ ונשתמש לגביה בכלל ד׳אלמברט לסדרות. אז מתקיים

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1!+2!+3!\cdots+n!+(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{1!+2!+3!\cdots+n!}=(\frac{n}{n+1})^n\frac{1}{n+1}\frac{1!+2!+3!\cdots+n!+(n+1)!}{1!+2!+3!\cdots+n!}=$$

$$=(\frac{1}{1+1/n})^n\frac{1}{n+1}(\frac{1!+2!+3!\cdots+n!}{1!+2!+3!\cdots+n!}+\frac{(n+1)!}{1!+2!+3!\cdots+n!})\le\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\frac{1}{n+1}(1+\frac{(n+1)!}{n!})=$$

$$=\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\frac{1}{n+1}(1+n+1)=\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\frac{n+2}{n+1}.\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\frac{n+2}{n+1}=\frac{1}{e}1<1.$$

לכן גבול הסדרה הוא 0 לפי משפט ד,אלמברט לסדרות.

פתרון שני יפה יותר, תודה לM^{elle} Abigail

$$0\le\frac{1!+2!+3!\cdots+n!}{n^n}\le b_n:=\frac{n\cdot n!}{n^n},\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{\frac{(n+1)\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n\cdot n!}{n^n}}=\frac{(n+1)\cdot(n+1)!n^n}{n\cdot n!(n+1)^{n+1}}=\frac{n^n}{(n+1)^n}\frac{n+1}{n}=$$

$$=\frac{1}{(1+1/n)^n}\frac{n+1}{n};\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{1}{e}1=\frac{1}{e}<1\to\lim_{n\to\infty}b_n=0\to\lim_{n\to\infty}\frac{1!+2!+3!\cdots+n!}{n^n}=0$$

תשובה 2

א:

$$\lim_{x\to\infty}x^2\cdot(\ln\sqrt{3x^2+4}-\ln\sqrt{3x^2-1}),x^2\cdot(\ln\sqrt{3x^2+4}-\ln\sqrt{3x^2-1})=x^2\cdot\ln\frac{\sqrt{3x^2+4}}{\sqrt{3x^2-1}}=$$

$$=x^2\cdot\ln\sqrt{\frac{3x^2+4}{3x^2-1}}=\frac{1}{2}\ln[(\frac{3x^2+4}{3x^2-1})^{x^2}].\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+4}{3x^2-1}=1,(\frac{3x^2+4}{3x^2-1}-1)x^2=\frac{5x^2}{3x^2-1},\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2}{3x^2-1}=\frac{5}{3}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\ln[(\frac{3x^2+4}{3x^2-1})^{x^2}]=\frac{1}{2}\ln e^{\frac{5}{3}}=\frac{5}{6}.$$

ב:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x-\tan x}{\cos x-\frac{1}{\cos x}}\right),\ \frac{\sin x-\tan x}{\cos x-\frac{1}{\cos x}}=\frac{\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{1}-\frac{1}{\cos x}}=\frac{\sin x\cos x-\sin x}{\cos x\cos x-1}=*=\frac{\sin x(\cos x-1)}{-\sin^2 x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}=$$

$$=\frac{2\sin^2(x/2)}{2\sin(x/2)\cos(x/2)}=\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)},\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x-\tan x}{\cos x-\frac{1}{\cos x}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}\right)=\frac{0}{1}=0.$$

אפשר להמשיך את הפתוח אחרת החל מהכוכבית,תודה לShaked M[elle].

$$\frac{\sin x-\tan x}{\cos x-\frac{1}{\cos x}}=\frac{\sin x\cos x-\sin x}{\cos x\cos x-1}=\frac{\sin x(\cos x-1)}{(\cos x+1)(\cos x-1)}=\frac{\sin x}{(\cos x+1)},$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x-\tan x}{\cos x-\frac{1}{\cos x}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{(\cos x+1)}\right)=\frac{0}{2}=0.$$

ג:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{7x^2-3x+7}{7x-5\sqrt{x}-9}\right)^{7x-2},\frac{7x^2-3x+7}{7x-5\sqrt{x}-9}=x\frac{7x-3+7/x}{7x-5\sqrt{x}-9},\lim_{x\to+\infty}x\frac{7x-3+7/x}{7x-5\sqrt{x}-9}=\infty\cdot 1=\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{7x^2-3x+7}{7x-5\sqrt{x}-9}\right)^{7x-2}=\infty^{\infty}=\infty$$

תשובה 3

מתקיים כי $-1\le\sin(\frac{1}{x})\le 1$ וכי $\lim_{x\to 0}2x=0$ ומכפלת חסומה בשואפת ל-0 גם היא שואפת ל-0, לכן הפונקציה רציפה בנקודה 0.

תשובה 4

$$(\ln(7x))'=\frac{1}{x},\frac{\ln(7(x+h))-\ln(7x)}{h}=\frac{\ln(\frac{7(x+h)}{7x})}{h}=\frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{h}=\frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{x\frac{h}{x}}=\frac{1}{x}\frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}},$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(7(x+h))-\ln(7x)}{h}=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}=\frac{1}{x}\lim_{\frac{h}{x}\to 0}\frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}=\frac{1}{x}\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=\frac{1}{x}\cdot 1=\frac{1}{x}.$$

תשובה 5

נגדיר $f(x)=e^{-5x}+2e^{3x}+7x^4+8\sin(5x)+7x^2-4$. אז f(0)=1+2+0+0+0-4=-1

אם נוכיח כי הגבול של f כאשר שואפים לאינסוף הוא חיובי אז יש שרש כאשר מתקרבים לאינסוף, וכנ״ל אם נוכיח כי הגבול הוא אינסוף כאשר שואפים למינוס אינסוף.

ואכן, 8sin(5x)-4 חסומה ונותר לחשב את הגבול של שאר הפונקציה:

$$g(x)=e^{-5x}+2e^{3x}+7x^4+7x^2, \lim_{x\to\infty} g(x)=0+\infty+\infty+\infty=\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\infty+0+\infty+\infty=\infty$$

כדרוש.