



מבחן סוף בקורס אינפיב-כתת הנדסאים סמסטר קיץ, מועד א.

יום א, כה תשרי התשע"ה 19-10-2014

- מורה : גיורא דולה.
- משך המבחן שלוש שעות.
- מותר להשתמש במחשבוניס לא מדעיים ובדפי הנוסחאות המצורפים.
- התשובות תכתבנה במחברת.
- יש לנמק את כל החשובים.
- המבחן כולל 9 שאלות.
- שאלות 1 סעיף א, ו 8 הן שאלות הוכחה בנות משקל של 10 נקודות כ"א. כל סעיף אחר משקלו 8 נקודות.

בהצלחה.

ענה על כל השאלות הבאות :

1. א. נסח והוכח את המבחן האינטגרלי להתכנסות טורים חיוביים. (10%)

ב. בדוק התכנסות הטור הבא: $(8\%) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{\sqrt{n} \cdot e^{\sqrt{n}}}$

2. חשב את האינטגרל הבא: (8%)

$$\int \frac{3x^2 - 16x + 15}{x(x^2 - 4x + 3)} dx$$

3. מצא את השטח החסום על ידי הגרפים של הפונקציות:

(8%) $g(x) = 3x^3 - 6x^2 + 4x - 5$ ו $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 5$

4. חשב את אורך הקשת של העקומה $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ בתחום: $\frac{1}{8} \leq x \leq 1$. (8%)

5. בדוק התכנסות האינטגרל הבא: $(8\%) \int_1^{\infty} \frac{\cos(-2x)}{x\sqrt{x}} dx$ נמק. (8%)

6. מצא את הגבול הבא: (8%)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2n \left(\frac{1}{n^2 + 1^2} + \frac{1}{n^2 + 2^2} + \frac{1}{n^2 + 3^2} + \dots + \frac{1}{n^2 + n^2} \right)$$

7. בדוק התכנסות ארבעה מתוך חמשת הטורים הבאים. נמק. (32%)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n^n} \quad \text{א.}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n + \ln n}{n \cdot \ln n} \quad \text{ב.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{0.5^n}{\left(1 - \frac{5}{3n+9}\right)^{n^2}} \quad \text{ג.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(n!) + 8}{n^2 \cdot \ln n} \quad \text{ד.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \quad \text{ה.}$$

8. הוכח כי אם לפונקציה f קיים אינטגרל בקטע $[a,b]$ אז f חסומה בקטע (10%).

בהצלחה!!!

דף נוסחאות

1. נוסחאות הכפל ופירוק לגורמים:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b), \quad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2), \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

2. משוואה ריבועית

א. פתרון המשוואה $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) הוא $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ב. פירוק הטרינום $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

3. חזקות ושורשים

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad (ab)^x = a^x b^x, \quad \sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}, \quad \sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}},$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \frac{b^x}{a^x}, \quad a^0 = 1,$$

$$(a^x)^y = a^{xy}, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \quad \sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[x]{b} = \sqrt[x]{ab}$$

4. לוגריתמים.

הגדרת ה- \log : $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

תחום ההגדרה: $\log_a x$ מוגדר רק כאשר $x > 0$ ו- $0 < a, a \neq 1$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a x^y = y \cdot \log_a x;$$

$$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y, \quad \log_a \sqrt[y]{x} = \frac{1}{y} \cdot \log_a x;$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad \log_a x = \frac{1}{\log_x a};$$

$$a^{\log_a x} = x, \quad \ln x = \log_e x, \quad e = 2.718281828\dots$$

$$\ln x = a \Rightarrow x = e^a$$

5. הגדרת נגזרת הפונקציה f בנקודה x_0 : $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

6. נגזרות בסיסיות.

$$(x^a)' = ax^{a-1}, \quad (a^x)' = \ln a \cdot a^x;$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (e^x)' = e^x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

7. כללי גזירה

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x);$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

$$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

8. אינטגרלים מיידיים

$$\int 0 dx = C;$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C;$$

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, a \neq -1;$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C;$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

9. כללי אינטגרציה.

$$\int (f(x) \pm d(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx;$$

$$\int af(x) dx = a \int f(x) dx;$$

$$\int f(x) dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b) dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C;$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

אינטגרציה בחלקים בנוסח אחר:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

החלפת משתנה אינטגרציה:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, t = g(x)$$

10. שמושי אינטגרלים

$$S = \int_a^b (g(x) - f(x))dx \quad \text{א. שטח}$$

$$S = \frac{1}{2} \int_a^\beta r^2(\varphi) d\varphi \quad \text{ב. שטח בקואורדינטות קטביות}$$

$$V = \pi \int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx \quad \text{ג. נפח גוף סבוב סביב ציר x}$$

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx \quad \text{ד. נפח גוף סבוב סביב ציר y}$$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad \text{ה. אורך קו}$$

11.

א. הזהויות היסודיות הטריגונומטריות

π רדיאן שווים ל-180 מעלות.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \tan x \cdot \cot x = 1;$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

ב. סכום והפרש זוויות

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta). \quad :$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

ג. זוויות כפולות וחצויות:

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha).$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}.$$

$$\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha) - 1}{2 \cot(\alpha)}.$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}.$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}.$$

$$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}.$$

ד. סכומים והפרשים:

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).$$

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right).$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).$$

ה. מכפלות:

$$\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}.$$

$$\cos(\alpha) \sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{2}.$$

$$\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}.$$

$$\sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}.$$

תשובות

ב-1

ידוע כי g, f פונקציות חיוביות $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{\sqrt{n} \cdot e^{\sqrt{n}}}$, $f(x) = \frac{7}{\sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}}}$, $h(x) = e^{\sqrt{x}}$, $g(x) = \sqrt{x}$

ועולות, אז גם הפונקציה $\sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}}$ חיובית ועולה כמכפלת פונקציות כאלו, ולכן f חיובית ויורדת בתור שבע חלקי פונקציה חיובית ועולה. גם ברור כי $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. לכן אפשר להסתמך על מבחן האינטגרל והטור מתכנס

אם ורק אם האינטגרל מתכנס, ומתקיים.

$$I = \int_1^{\infty} \frac{7}{\sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}}} dx, t = \sqrt{x}, dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}, dx = 2t dt, I = \int_1^{\infty} \frac{dt}{2e^t} = \frac{-1}{2e^t} \Big|_{\ln 1}^{\infty} = \frac{1}{2e} - \frac{1}{2e^0} = \frac{1}{2e}.$$

ולכן האינטגרל מתכנס ולכן הטור מתכנס.

.2

$$\frac{3x^2 - 16x + 15}{x(x^2 - 4x + 3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-3}, 3x^2 - 16x + 15 = A(x-1)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-1).$$

$$\rightarrow 3A = 15, -2B = 2, 6C = -6, A = 5, B = C = -1, \frac{3x^2 - 16x + 15}{x(x^2 - 4x + 3)} = \frac{5}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-3}$$

$$\int \frac{3x^2 - 16x + 15}{x(x^2 - 4x + 3)} dx = 5 \ln |x| - \ln |x-1| - \ln |x-3| + C$$

3

$$(8\%) \quad g(x) = 3x^3 - 6x^2 + 4x - 5 \quad \vee \quad f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 5$$

$$f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 5 = g(x) = 3x^3 - 6x^2 + 4x - 5 \rightarrow g - f = 2x^3 - 5x^2 + 2x = 0, x(x-2)(2x-1) = 0,$$

$$x = 0, 0.5, 2, (g-f)(1) < 0, (g-f)(0.25) > 0, A = \int_0^{0.5} (g-f) dx - \int_{0.5}^2 (g-f) dx$$

$$\int (g-f) dx = (2/4)x^4 - (5/3)x^3 + x^2 = h(x). A = 2h(0.5) - h(2) - h(0).$$

$$h(0.5) = \frac{1}{32} - \frac{5}{24} + \frac{1}{4} = \frac{3-20+24}{96} = \frac{7}{96}, h(2) = 8 - \frac{40}{3} + 4 = 12 - \frac{40}{3} = -\frac{4}{3}.$$

$$A = 2h(0.5) - h(2) - h(0) = \frac{7}{96} + \frac{7}{96} + \frac{4}{3} = \frac{7}{48} + \frac{4}{3} = \frac{7+64}{48} = \frac{71}{48}$$

$$(8\%) \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1 \quad \text{חשב את אורך הקשת של העקומה}$$

4

בתחום: $\frac{1}{8} \leq x \leq 1$.

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1 \rightarrow y = (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \rightarrow y' = \frac{3}{2} (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}, (y')^2 = (1 - x^{\frac{2}{3}}) x^{-\frac{2}{3}} = x^{-\frac{2}{3}} - 1,$$

$$\sqrt{(y')^2 + 1} = x^{-\frac{1}{3}}, \int \sqrt{(y')^2 + 1} dx = \frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2} = L(x), L(1) - L(1/8) = (\frac{3}{2} - \frac{3}{8}) = \frac{9}{8}.$$

5

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos(-2x)}{x\sqrt{x}} dx = ?, f(x) = \frac{1}{x^{3/2}}, g(x) = \cos(-2x) = \cos(2x), \int_a^b \cos(2x) dx =$$

$$= \frac{\sin(2x)}{2} \Big|_a^b = \frac{\sin(2b) - \sin(2a)}{2}, \left| \int_a^b \cos(2x) dx \right| \leq \frac{1+1}{2} = 1. \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{3/2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\left(\frac{1}{e^{4x}}\right)' = -\frac{3x^{1/2}}{2(x^{3/2})^2} = \frac{-3}{2x^{5/2}}. (f' < 0) \leftrightarrow (x > 0)$$

לכן האינטגרל מתכנס לפי משפט דיריכלה להתכנסות אינטגרלים לא אמיתיים.

6

$$2n \left(\frac{1}{n^2 + 1^2} + \frac{1}{n^2 + 2^2} + \frac{1}{n^2 + 3^2} + \dots + \frac{1}{n^2 + n^2} \right)$$

$$= \frac{2}{n} \left(\frac{1}{1 + (1/n)^2} + \frac{1}{1 + (2/n)^2} + \frac{1}{1 + (3/n)^2} + \dots + \frac{1}{1 + (n/n)^2} \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2n \left(\frac{1}{n^2 + 1^2} + \frac{1}{n^2 + 2^2} + \frac{1}{n^2 + 3^2} + \dots + \frac{1}{n^2 + n^2} \right) =$$

$$= 2 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 2 \arctan(x) \Big|_0^1 = 2(\arctan(1) - \arctan(0)) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

א .7

$$a_n = \frac{(n!)^2}{n^n}, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2 n^n}{n^2 (n+1)^{n+1}} = \frac{(n+1)}{n^2} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{n} \frac{(n+1)}{n} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\infty} \cdot \frac{1}{e} = 0 < 1$$

הטור מתכנס לפי מבחן דיאלמברט

$$a_n = \frac{n + \ln n}{n \cdot \ln n} > \frac{n}{n \cdot \ln n} = \frac{1}{\ln n} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n + \ln n}{n \cdot \ln n} : \text{ב}$$

$$\left(\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}\right) \leftrightarrow \left(\frac{\ln n}{n} < 1\right). \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1} = 0.$$

שהוא גדול מטור מתבדר.

ג.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{0.5^n}{\left(1 - \frac{5}{3n+9}\right)^{n^2}}, \sqrt[n]{a_n} = \frac{0.5}{\left(1 - \frac{5}{3n+9}\right)^n} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = ?, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{5}{3n+9}\right)^n = \frac{-5}{3}, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{0.5}{e^{\frac{5}{3}}} = \frac{e^{\frac{5}{3}}}{2} > \frac{e}{2} > 1$$

הטור מתבדר לפי מבחן השרש.

$$\text{ד: כיון שטור האיברים } a_n = (-1)^n \frac{\cos(n!) + 8}{n^2 \cdot \ln n}, |a_n| \leq \frac{1 \cdot (1+8)}{n^2 \cdot \ln n} = \frac{9}{n^2 \cdot \ln n} \leq \frac{9}{n^2}. \text{ בהחלט מתכנס, הטור מתכנס בהחלט ולכן מתכנס.}$$

:

ה:

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)}{(2n+2)} = \frac{2+1/n}{2+2/n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1, n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = n \left[\left(\frac{2n+2}{2n+1} \right) - 1 \right] = \frac{n}{2n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \frac{1}{2}$$

והטור מתבדר לפי מבחן ראבה.