המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

מבחן סוף במבנים אלגבריים למדעי המחשב-סמסטר סתו תשע"ה.

מועד א יום א,י אדר התשע"ה 1-3-2015

- מורה: גיורא דולה, מתרגל: רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שלש שעות.
- אפשר להשתמש רק במחשבון ובדפי העזר המצורפים.
- יש לכתוב במחברת תשובה מלאה על כל אחת מהשאלות.
- במבחן יש שלשה חלקים. בחלק א חמש שאלות מתוכן יש לבחור 4 ומשקל כל שאלה 10 נקודות. בחלק ב יש 4 שאלות ומתוכן יש לבחור 3. משקל כל שאלה בחלק ב 15 נקודות. בחלק ג שתי שאלות מתוכן יש לבחור אחת ומשקל כל שאלה 15 נקודות ס"הכ $3*15+4*10+1*15=100$
- בכל שאלה יש לנמק ולפרט ובשאלות 'הוכחה' בחלק השני יש להקפיד גם על נסוח טענות עזר.

בהצלחה.

עמותה רשומה 580242451 **Fax:** (972-9) 8844439 **:פקס** **Tel:** (972-9) 8607777 **:טל**

<u>חלק א</u>

שאלה 1

נביט ב 8 הנקודות $(\pm1,\pm2,\pm3)$ ב $\mathbb{R}^3$. הנקודות הן קדקדים של תבה בעלת שלשה ארכי מקצועות שונים. הגדר את G כאוסף כל ההעתקות שומרות המרחק החד חד ערכיות (חח״ע) ועל של התבה לעצמה עם פעולת הרכבת העתקות.

א. רשום את כל איברי G.

ב. חשב את הסדר של כל אבר ב-G.

ג. כמה הומומורפיזמים חח״ע ישנם $f:\mathbb{S}_3\to G$? רשום אותם.

ד. כמה הומומורפיזמים חח״ע ישנם $f:\mathbb{S}_2\to G$? רשום אותם.

שאלה 2

שתי תמורות על הקבוצה $\mathbb{Z}_7=\{0,1,2,3,4,5,6\}$ מוגדרות על ידי הנוסחאות הבאות (הפעולות מבוצעות ב $\mathbb{Z}_7$).

$$f=\begin{cases}\dfrac{x+2}{5-4x} & 3\neq x\in\mathbb{Z}_7\\ a & 3=x\in\mathbb{Z}_7\end{cases},\quad g=\begin{cases}\dfrac{2x+3}{4-4x} & 1\neq x\in\mathbb{Z}_7\\ b & 1=x\in\mathbb{Z}_7\end{cases}$$

א. מצא את a ואת b.

ב. חשב את $f^{-1}g^{-2}$.

ג. פרק את $f^{-1}g^{-2}$. למכפלה של מחזורים זרים.

ד. פרק את $f^{-1}g^{-2}$. למכפלה של חילופים.

ה. מצא את הסדר של $f^{-1}g^{-2}$.

שאלה 3

חשב את המחלק המשותף $d(x)$ הגדול ביותר של הפולינומים הבאים:
$a(x)=x^4+5x+6\in\mathbb{Z}_7[x],\ \ b(x)=x^3+2x^2+4x+6\in\mathbb{Z}_7[x]$. מצא פולינומים $u(x),v(x)\in\mathbb{Z}_7[x]$ המקיימים $d(x)=\gcd(a(x),b(x))=a(x)u(x)+b(x)v(x)$.

שאלה 4

נתונים חבורה אבלית G וחבורה חלקית שלה H≤G, ונגדיר את R(H) על ידי $R(H)=\{g\in G \mid \exists n\in\mathbb{N}, g^n\in H\}$. הוכח כי

א. R(H) חבורה חלקית של G.

ב. הוכח כי תמיד H≤R(H).

ג. מצא תנאי כך ש R(H)=G.

ד. מצא דוגמא G,H כך ש R(H)≠G.

שאלה 5

א. הבט במטריצה $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -i & 0\end{pmatrix}$ שהיא אבר $GL(C,2)$ (עם פעולת כפל מטריצות)

ב. א. מצא את הסדר שלה וסמן אותו n.

נגדיר העתקה $f:\mathbb{Z}_n\to GL(C,2)$ (כאשר ב $\mathbb{Z}_n$ ישנה פעולת החבור מודולו n) על ידי $f(1)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -i & 0\end{pmatrix}$. ועל ידי תכונות ההומומורפיזם.

ג. כתוב את f בצורה מפורשת.

ד. מצא את התמונה ההפוכה של החבורה החלקית $GL(R,2)$.

<u>חלק ב</u>

שאלה 6

הוכח את המשפט כי אם S שדה, ונתון $p(x)\in S[x]$, אז קימת לו הצגה יחידה כמכפלת פולינומים בלתי פריקים.

שאלה 7

הוכח את המשפט כי אם S שדה, ונתונים $p(x),q(x)\in S[x]$, אז קימים פולינומים $a(x),b(x)\in S[x]$ כך שמתקיים $\gcd(p(x),q(x))=p(x)a(x)+q(x)b(x)$.

שאלה 8

יהי $f:G\to H$ הומומורפיזם של חבורות: הוכח

א. תהי K חבורה חלקית של G. אז התמונה $f(K)$ היא חבורה חלקית של H.

ב. תהי L חבורה חלקית של H. אז התמונה ההפוכה $f^{-1}(L)$ היא חבורה חלקית של G.

ג. f חח״ע אם ורק אם Ker(f)={e}.

שאלה 9

הוכח כי לכל חבורה G וחבורה חלקית H מתקיים

א*. $\forall g \quad g\in g*H$

ב*. $\forall g,k\in G, k\in g*H \to k*H\subseteq g*H$.

ג*. $\forall g,k\in G, k\in g*H \to k*H=g*H$.

ד*. $\forall g,k\in G,\ [(g*H\cap k*H\neq\emptyset)\to(g*H=k*H)]$.

ה*. $\forall g \quad a_g: H\to g*H$ היא פונקציה חד חד ערכית ועל.

ו*. $G=\bigcup_{g\in G} g*H$.

חלק ג

שאלה 10

נתונה חבורה אבלית G, ונגדיר את H להיות אוסף כל האיברים של G בעלי סדר סופי. האם H היא חבורה חלקית? הוכח או סתור על ידי דוגמא נגדית.

שאלה 11

יהי $f:G\to H$ הומומורפיזם של חבורות: ותהי K חבורה חלקית (ח״ח) של G. הבט על $L=f^{-1}(f(K))$.

א. האם זו ח״ח?

ב. של איזו חבורה? .

ג. מה הקשר בין K וL?

ד. מה הקשר בין K וL כאשר f חד חד ערכית?

בהצלחה

תשובות:

תשובה 1

ברור כי כל העתקה חח״ע ועל ששומרת על המרחק צריכה לשלוח כל קדקד לקדקד אחר, וזה אפשרי רק על ידי שמירת הרכיבים או כפילתם במינוס, ולכן יש 8 העתקות:

$$I:(x,y,z)\to(x,y,z), -x:(x,y,z)\to(-x,y,z), -y:(x,y,z)\to(x,-y,z), -z:(x,y,z)\to(x,y,-z),$$
$$x:(x,y,z)\to(x,-y,-z), y:(-x,y,-z)\to(x,-y,z), z:(x,y,z)\to(-x,-y,z), -:(x,y,z)\to(-x,-y,-z)$$

. ברור כי הסדר של כל אבר הוא 2, כי כל אבר המורכב על עצמו שוה I, למעט I שלו יש סדר 1. לכן לא יתכן הומומורפיזם חח״ע $f:\mathbb{S}_3\to G$ כי כל אחד כזה שומר על סדר של כל אבר מהתחום, בתחום יש אברים בעלי סדר 3, ב G יש איברים רק בעלי סדר 2 . יתכנו הומומורפיזמים חח״ע $f:\mathbb{S}_2\to G$ כיון שגם בתחום וגם בטוח יש אברים בעלי סדר 2 ו-1 בלבד, ולכן האבר היחיד של $\mathbb{S}_2=\mathbb{Z}_2$ שהוא בעל סדר 2 , יכול ללכת ל-7 איברים שונים בG, ולכן יש 7 הומומורפיזמים חח״ע $f:\mathbb{S}_2\to G$.

תשובה 2

נחשב את f ואת g בצורה מפורשת. עבור f :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2/5 & 3/1 & 4/(-3) & 5/(-7) & 6/(-11) & 7/(-15) & 8/(-19) \\ 2/5 & 3/1 & 4/4 & 5/0 & 6/3 & 0/6 & 1/2 \\ 6 & 3 & 1 & ? & 2 & 0 & 4 \end{array}$$

ולכן נקבל את f על ידי :

$$f\downarrow \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 1 & 5 & 2 & 0 & 4 \end{array}$$

ובצורה דומה עבור עבור g

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3/4 & 5/0 & 7/(-4) & 9/(-8) & 11/(-12) & 13/(-16) & 15/(-20) \\ 3/4 & ? & 0/3 & 2/6 & 4/2 & 6/5 & 1/1 \\ 6 & ? & 0 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{array}$$

ולכן נקבל את g על ידי :

$$g\downarrow \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 0 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{array}$$

וגם את g^2 :

$$\begin{array}{cccccccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ g(x) & 6 & 3 & 0 & 5 & 2 & 4 & 1 \\ g^2(x) & 1 & 5 & 6 & 4 & 0 & 2 & 3 \end{array}$$

וכעת נחשב את ההפוכים :

$$f\downarrow \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 1 & 5 & 2 & 0 & 4 \end{array}$$

$$f^{-1}\downarrow \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 6 & 3 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ g(x) & 6 & 3 & 0 & 5 & 2 & 4 & 1 \\ g^2(x) & 1 & 5 & 6 & 4 & 0 & 2 & 3 \\ g^{-2}(x) & 4 & 0 & 5 & 6 & 3 & 1 & 2 \end{array}$$

ולבסוף נקבל את ההרכבה :

$$\begin{array}{cccccccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ g^{-2}(x) & 4 & 0 & 5 & 6 & 3 & 1 & 2 \\ f^{-1}(x) & 5 & 2 & 4 & 1 & 6 & 3 & 0 \\ f^{-1}g^{-2}(x) & 6 & 5 & 3 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}$$

העתקה זו היא מהצורה (0641523) ובעלת סדר 6,

ונקבל אותה כמכפלת חלופים : (03)(02)(05)(01)(04)(06).

תשובה 3

$$x^4+5x+6=(x^3+2x^2+4x+6)(x+5)+4$$
$$(x^3+2x^2+4x+6)=4(2x^3+4x^2+x+5), \mathrm{gcd}=4.$$

$$4=(x^4+5x+6)-(x^3+2x^2+4x+6)(x+5)$$

תשובה 4

ברור כי H≤R, כיון $\forall g\in H, g^1=g\in H$, ולכן R איננה ריקה. יהיו נתונים $h,k\in R$. אז יש $m,n\in\mathbb{N}, h^m, k^n\in H$, ובנוסף מתקיים כי $(k^n)^{-1}=(k^{-1})^n\in H$, ולכן תוך שמוש באבליות של G מתקיים $(hk^{-1})^{mn}=(h^m)^n((k^{-1})^n)^m\in H$ כדרוש. אם כל אבר ב G הוא בעל סדר סופי אז לכל אבר תהיה חזקה סופית שתעביר אותו לאבר היחידה ולכן גם ל_H, אבל אם H היא חבורת היחידה ו G מכילה איברים מסדר אינסופי אז אף חזקה שלהם לא תכניס אותם ל-H.

תשובה 5

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -i & 0\end{pmatrix}, A^2=\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}, (i)^4=1, (A^2)^4=I, o(A)=1,2,4,8,$$
$$A^4=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

לכן הסדר של A הוא 8.

א. מכיון ש f שולחת איבר מסדר 8 לאבר מסדר 8, היא מגדירה איזומורפיזם של חבורות ציקליות מאותו סדר.

ב. האיברים $A^4=-I, A^8=I$ הם היחידים שתמונתם היא מטריצה הפיכה ממשית, ולכן התמונה ההפוכה היא הקבוצה $\{0,4\}$ שהיא ח"ח של $\mathbb{Z}_8$,.

תשובה 10

ברור כי H איננה ריקה כי לאבר היחידה יש הסדר הסופי 1. יהיו נתונים $h,k \in H$. אז יש $m,n \in \mathbb{N}, h^m = k^n = e$, ובנוסף מתקיים כי $(k^n)^{-1} = (k^{-1})^n = e$, ולכן תוך שמוש באבליות של G מתקיים $(hk^{-1})^{mn} = (h^m)^n((k^{-1})^n)^m = (e)^n(e)^m = e$ כדרוש.

תשובה 11

לפי משפט שהוכחנו $M = f(K)$ ח״ח של H, ו $L = f^{-1}(M)$ ח״ח של G.
לפי הגדרת $f^{-1}(M)$, אילו כל האיברים שתמונתם על ידי f היא בתוך M, ולפי ההגדרה כל איברי K תמונתם על ידי f היא בתוך M, ולכן נובע כי $K \subseteq M$. אם f חח״ע אז מתקיים שויון $K = M$