יום ה ב אב התשס"ג, 31-7-2003 .

מבחן סופי בקורס מרוכבות. מועד ב. מורה : גיורא דולה.

משך המבחן שעתים וחצי. המבחן הוא עם כל חומר עזר.

רשום את התשובות במחברת.

המבחן כולל 8 שאלות שוות ערך. ענה/י כמה שתוכל.   בהצלחה.

שאלה 1

חשב את $$\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^4+10x^2+9}$$

תשובה תוך שמוש ברקובות: המכנה שוה ל-$(x^2+1)(x^2+9)$. נתיחס לתחום במישור הכלוא על ידי הציר הממשי מ-R- עד R ומשם בחצי מעגל. עבור R גדול מספיק לאינטגרנד יש שני קטבים פשוטים בתחום הכלוא, x=i,3i. לכן לפי משפט השארית האינטגרל שוה ל-$2\pi i$ כפול סכום השאריות של האינטגרנד בקטבים.

אז:

$$res(z=i)=\lim_{z\to i}\frac{z-i}{(z^2+1)(z^2+9)}=$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{1}{(z+i)(z^2+9)}=\frac{1}{16i}$$

וכנ"ל:

$$res(z=3i)=\lim_{z\to 3i}\frac{z-3i}{(z^2+1)(z^2+9)}=$$

$$=\lim_{z\to 3i}\frac{1}{(z+3i)(z^2+1)}=-\frac{1}{48i}$$

ולכן $$res(z=i)+res(s=3i)=\frac{1}{16i}-\frac{1}{48i}=\frac{1}{24i}.$$

ולכן:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+10x^2+9}=\frac{2\pi i}{24i}=\frac{\pi}{12},\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^4+10x^2+9}=\frac{\pi}{24}$$

שאלה 2

חשב את

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(t)dt}{3+\sin(t)+\cos(t)}$$

תשובה: נציב $z=e^{it}$ עבור $0\le t\le 2\pi$. אז מתקיים $|z|=1$ וכמו כן $dz=izdt$ ונקבל:

$$I=\int_0^{2\pi} \frac{\sin(t)dt}{3+\sin(t)+\cos(t)}=\int_{|z|=1} \frac{{z-z^{-1}}/{2i}}{3+({z-z^{-1}}/{2i})+(z+z}$$

$$=\int_{|z|=1} \frac{{z^2-1}/{2iz}}{3+({z^2-1}/{2iz})+({z^2+1}/{2z})}\frac{dz}{iz}=$$

$$=-i\int_{|z|=1} \frac{(z^2-1)dz}{z(6iz+(z^2-1)+i(z^2+1))}.$$

נמשיך ונפתח את האיטגרל:

$$I = -i \int\limits_{|z|=1} \frac{(z^2-1)dz}{z(6iz+(z^2-1)+i(z^2+1))} =$$

$$= -i \int\limits_{|z|=1} \frac{(z^2-1)dz}{z(z^2(1+i)+6iz+(-1+i))} =$$

$$= \frac{-i}{1+i} \int\limits_{|z|=1} \frac{(z^2-1)dz}{z(z^2+\frac{6i}{1+i}z+\frac{-1+i}{1+i})} =$$

$$= \frac{-i(1-i)}{2} \int\limits_{|z|=1} \frac{(z^2-1)dz}{z(z^2+3i(1-i)z+\frac{(-1+i)(1-i)}{2})} =$$

$$= \frac{-(1+i)}{2} \int\limits_{|z|=1} \frac{(z^2-1)dz}{z(z^2+3(1+i)z+i)}.$$

נמצא את שרשי המכנה:

$$\frac{-3(1+i)\pm\sqrt{9(1+i)^2-4i}}{2} = \frac{-3(1+i)\pm\sqrt{18i-4i}}{2} =$$

$$= \frac{-3(1+i)\pm\sqrt{7}(1+i)}{2} = (\frac{-3\pm\sqrt{7}}{2})(1+i).$$

נשים לב כי

ולכן, $|(1+i)|=\sqrt{2}.$ השרש היחיד של הפולינום בתחום הוא ((-3+√7)/2)(1+i).

לכן ישנם שני קטבים של f בתחום הכלוא, ונחשב את השאריות שלהם. בנקודה ((-3+√7)/2)(1+i) נקבל את הבטוי:

$$\frac{z^2-1}{z(z-\frac{-3-\sqrt{7}}{2}(1+i))}.$$

בבטוי זה יש להציב את השרש. בבטוי הארוך שבמכנה, נקבל את הפרש השרשים וזהו √7(1+i). בבטוי z שבמכנה, נקבל את השרש. לכן המכנה שוה לבטוי:

$$\frac{(1+i)(-3+\sqrt{7})}{2}\bullet\sqrt{7}(1+i)=i(7-3\sqrt{7}).$$

נעלה את השרש ברבוע ונחסר אחד ונקבל:

$$\frac{2i(16-6\sqrt{7})}{4}-1=i(8-3\sqrt{7})-1$$

ולכן נקבל את השארית בנקודה:

$$\frac{i(8-3\sqrt{7})-1}{i(7-3\sqrt{7})}=\frac{(-i)[i(8-3\sqrt{7})-1]}{(-i)i(7-3\sqrt{7})}=$$

$$=\frac{(8-3\sqrt{7})+i}{7-3\sqrt{7}}=\frac{(7+3\sqrt{7})[(8-3\sqrt{7})+i]}{(7+3\sqrt{7})(7-3\sqrt{7})}=$$

$$-\frac{(56-21\sqrt{7}+24\sqrt{7}-63)+(7+3\sqrt{7})i}{14}=$$

$$-\frac{(-7+3\sqrt{7})+(7+3\sqrt{7})i}{14}$$

השארית ב-0 היא -1/i=i ולכן סכום השאריות הוא:

$$\frac{(7-3\sqrt{7})-(7+3\sqrt{7})i}{14}+i=\frac{(7-3\sqrt{7})+(7-3\sqrt{7})i}{14}=$$

$$\frac{(7-3\sqrt{7})(1+i)}{14}.$$

בטוי זה נכפל ב-$2\pi i$ ובמקדם של האינטגרל ונקבל:

$$-\frac{(7-3\sqrt{7})(1+i)}{14}\bullet-\frac{1+i}{2}\bullet 2\pi i=$$

$$\frac{-\pi(7-3\sqrt{7})}{7}=\pi(\sqrt{9/7}-1).$$

שאלה 3

פתח את $1/(z^3-z^2+z-1)$ לטור לורן סביב $a=1$. מספיק לתת את ארבעת האיברים הראשונים.

תשובה: נפרק את המכנה $(z^2+1)(z-1)$

ולכן: $$\frac{1}{z^3-z^2+z-1}=\frac{1}{z-1}\,\frac{1}{z^2+1}$$ מטרתנו, לבטא את צד ימין בחזקות של $u=z-1$.   ונקבל

$$\frac{1}{z^3-z^2+z-1}=\frac{1}{z-1}\frac{1}{z^2+1}=$$

$$=\frac{1}{u}\frac{1}{(u+1)^2+1}=\frac{1}{u}\frac{1}{2+2u+u^2}=\frac{1}{2u}\frac{1}{1+u+u^2/2}=$$

$$\frac{1}{2u}(1-(u+u^2/2)+(u+u^2/2)^2-(u+u^2/2)^3-(u+u^2/2)^4-\cdots).$$

כאשר פתחנו כל טור לפי הנוסחה: $1/(1+w)=1-w+w^2-w^3+\ldots$, נקבץ את האיברים עד סדר 4 כולל:

$$\frac{1}{z^3-z^2+z-1}=\frac{1}{2u}(1-u-u^2/2+u^2+u^3$$

$$+u^4/4-u^3-3u^4/2+u^4+\cdots)=$$

$$=\frac{1}{2u}(1-u+u^2/2-u^4/4+\cdots)=$$

$$\frac{1}{2u}-\frac{1}{2}+\frac{u}{4}-\frac{u^3}{8}+\cdots.$$

ואלו ארבעת האיברים הראשונים של טור לורן.

בדיקה: נבדק את החשבויינעס על ידי זה שנחשב את השארית. אז

$$\frac{z-1}{z^3-z^2+z-1}=\frac{1}{z^2+1}\xrightarrow[z\to 1]{}\frac{1}{2}$$ וקבלנו אותה שארית.

כעת נגזר את הבטוי האחרון ונשאיף לאחד, ונקבל:

$$(\frac{1}{z^2+1})'=-\frac{2z}{(z^2+1)^2}\xrightarrow[z\to 1]{}-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$$ וזהו

האבר מהסדר הבא. כעת נגזר את הבטוי הקודם, נחלק ב-2 ונשאיף לגבול ונקבל:

$$(-\frac{2z}{(z^2+1)^2})'=-\frac{2(z^2+1)^2-2z2(z^2+1)2z}{(z^2+1)^4}=$$

$$-\frac{2(z^2+1)(z^2+1-4z^2)}{(z^2+1)^4}=\frac{2(3z^2-1)}{(z^2+1)^3}\xrightarrow[z\to 1]{}\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

ואכן המקדם הרצוי הוא 1/4.

נגזר שוב

ונקבל:

$$(2\frac{(3z^2-1)}{(z^2+1)^3})'=2\frac{(6z(z^2+1)^3-3(z^2+1)^2 2z(3z^2-1))}{(z^2+1)^6}=$$

$$12z\frac{(z^2+1+1-3z^2)}{(z^2+1)^4}=\frac{24z(1-z^2)}{(z^2+1)^4}\xrightarrow[z\to 1]{}0.$$ ו

ואכן המקדם הרצוי הוא 0.

נותר לגזור עוד פעם אחת ולהציב 1 . נקבל:

$$(24\frac{z-z^3)}{(z^2+1)^4})' = 24\frac{((1-3z^2)(z^2+1)^4-4(z^2+1)^3 2z(1-z^2)z)}{(z^2+1)^8} =$$

$$24\frac{(z^2+1)(1-3z^2)-8z^2(1-z^2)}{(z^2+1)^5} \xrightarrow[z\to 1]{} 24\frac{2\cdot(-2)-8\cdot 0}{32} = -3.$$

ואכן אם נחלק בטוי זה ב 4!=24 נקבל את המקדם הרצוי ‎-1/8 .

תרגיל 4 .

חשב את התמונה של חלק הטבעת $1\le|z|\le e$ שברביע הראשון על ידי הפונקציה ln.

תשובה:

ln(1)=0
ln(e)=1
ln(i)=ln(1cis(π/2))=0+(π/2)I
ln(ei)=ln(ecis(π/2))=1+(π/2)i

קבלנו מלבן. מלבן זה אינו יחיד, כל הזזה של מלבן זה ב-2πki, כלומר כלפי מעלה, תתן מלבן חופף שגם הוא בתמונה.

שאלה 5

בטא את המשואה $68x^2-64xy+68y^2=900$ בצורה מרוכבת:

תשובה

$$(50+18)x^2-2(50-18)xy+(50+18)y^2=900.$$

נקבץ איברים ונקבל:

$$50(x^2-2xy+y^2)+18(x^2+2xy+y^2)=900.$$

נרכז חזקות ונחלק ב-900 ונקבל:

$$\frac{(y-x)^2}{18}+\frac{(x+y)^2}{50}=1.$$

נוציא גורם 2 ונקבל:

$$\frac{\left(\frac{y-x}{\sqrt{2}}\right)^2}{9}+\frac{\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2}{25}=1.$$

נביט על המספר המרכב $w=(x+y)/\sqrt{2}+i(y-x)/\sqrt{2}$. אז רכיבי w מקימים משואת אליפסה, עם ציר גדול השוה 10 וציר קטן 6 ולכן המרחק בין המוקדים הוא 8 . לכן המשואה שמקים w היא $|w-4|+|w+4|=10$. נביט על

$$\frac{1-i}{\sqrt{2}}(x+iy)=\frac{(x+y)}{\sqrt{2}}+i\,\frac{(y-x)}{\sqrt{2}}$$

. המספר הכופל את z הוא $cis(-45)$. ולכן המשואה היא $|cis(-45)z-4|+|cis(-45)z+4|=10$.

שאלה 6

הבט במשואה $z^4+4z^3+5z^2+6z+10=0$ וסמן את שרשיה על ידי a,b,c,d .

חשב את $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}+d^{-1}$ ואת $(abc)^{-1}+(abd)^{-1}+(acd)^{-1}+(bcd)^{-1}$.

תשובה: נניח כי המשוואה המקורית היא מהצורה (z-a)(z-b)(z-c)(z-d) .

אז –a-b-c-d=4 וכן –(abc+acd+acd+bcd)= 6 וכן -abcd=10 . לכן

$$\frac{1}{abc}+\frac{1}{acd}+\frac{1}{acd}+\frac{1}{bcd}=\frac{a+b+c+d}{abcd}=\frac{-4}{-10}=\frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{abc+abd+acd+bcd}{abcd}=\frac{-6}{-10}=\frac{3}{5}$$

שאלה 7 :

חשב את arcot(z) .

תשובה:

נסמן w=arcot(z) ואז cot(w)=z ונקבל:

$$z=\cot(w)=\frac{\cos(w)}{\sin(w)}=\frac{{e^{iw}+e^{-iw}}/{2}}{{e^{iw}-e^{-iw}}/{2i}}=i\,\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{e^{iw}-e^{-iw}}$$

אז:

$$z+i=i+i\,\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{e^{iw}-e^{-iw}}=i\,\frac{(e^{iw}-e^{-iw})+(e^{iw}+e^{-iw})}{e^{iw}-e^{-iw}}=$$

$$=2i\,\frac{e^{iw}}{e^{iw}-e^{-iw}}$$

ובצורה דומה:

$$z-i=-i+i\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{e^{iw}-e^{-iw}}=i\frac{(e^{iw}+e^{-iw})-(e^{iw}-e^{-iw})}{e^{iw}-e^{-iw}}=$$

$$=2i\frac{e^{-iw}}{e^{iw}-e^{-iw}}$$

$$\frac{z+i}{z-i}=\frac{2i}{2i}\frac{e^{iw}\big/e^{iw}-e^{-iw}}{e^{-iw}\big/e^{iw}-e^{-iw}}=\frac{e^{iw}}{e^{-iw}}=e^{2iw}$$

נוציא לוג ונחלק ונקבל: $\operatorname{ar}\cot(z)=w=\frac{1}{2i}\ln(\frac{z+i}{z-i}).$

שאלה 8

נתון פרמטר $t>0$. חשב את $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{\cos(tz)}{z^3}dz$

תשובה: נפתח את המונה לטור מקלורן סביב 0 , ובכך נקבל את פתוח לורן של האינטגרנד סביב 0 . אז:

$$\cos(tz) = 1 - \frac{(tz)^2}{2} + \frac{(tz)^4}{4!} - \cdots$$

לכן השארית של הפונקציה סביב 0 היא $-t^2/2$, ולכן, האינטגרל הוא $(-2\pi i)t^2/2=-\pi i\, t^2$

דרך שניה לחשוב השארית: נביט על $z^3 f(z)=\cos(tz)$ ופונקציה זו נגזור פעמיים נקבל $-t^2\cos(tz)$ נחלק ב-2 ונציב ב-0 ונקבל כמקודם $-t^2/2$.