

מבחן מועד א' סמסטר אביב תשע"ז
מבני נתונים

- משך המבחן: שלוש וחצי שעות.
- יש לענות על כל השאלות.
- מותר השימוש בחומר עזר כלשהו פרט למחשבים (מחשבוני מותר).
- יש להקפיד על כתיבה ברורה ומסודרת של התשובות.

בהצלחה!

1. (20 נקודות)

הגדרה: נגדיר עץ בינארי אדום לבן, כעץ בינארי שבו לכל צומת x , בנוסף לשדות הרגילים, יש שדה צבע $color(x)$ שהוא אדום (red) או לבן (white).

נזכיר שעבור צומת x בעץ בינארי T אנחנו מסמנים ב- T_x את תת העץ של T ששורשו x , (תת העץ T_x כולל גם את הצומת x).

נגדיר שצומת x בעץ בינארי אדום לבן הוא צומת טוב אם סכום המפתחות של כל הצמתים האדומים בתת העץ T_x , גדול יותר מסכום המפתחות של כל הצמתים הלבנים בתת העץ T_x .

כתוב/כתבי פסאודו-קוד של תכנית בשם $P1$, יעילה ככל האפשר, אשר מקבלת כפרמטר עץ בינארי אדום לבן T , ומדפיסה תחילה את כל הצמתים הטובים בעץ (אין חשיבות לסדר הדפסת הצמתים), ולאחר מכן התכנית מדפיסה את מספר הצמתים הטובים בעץ.

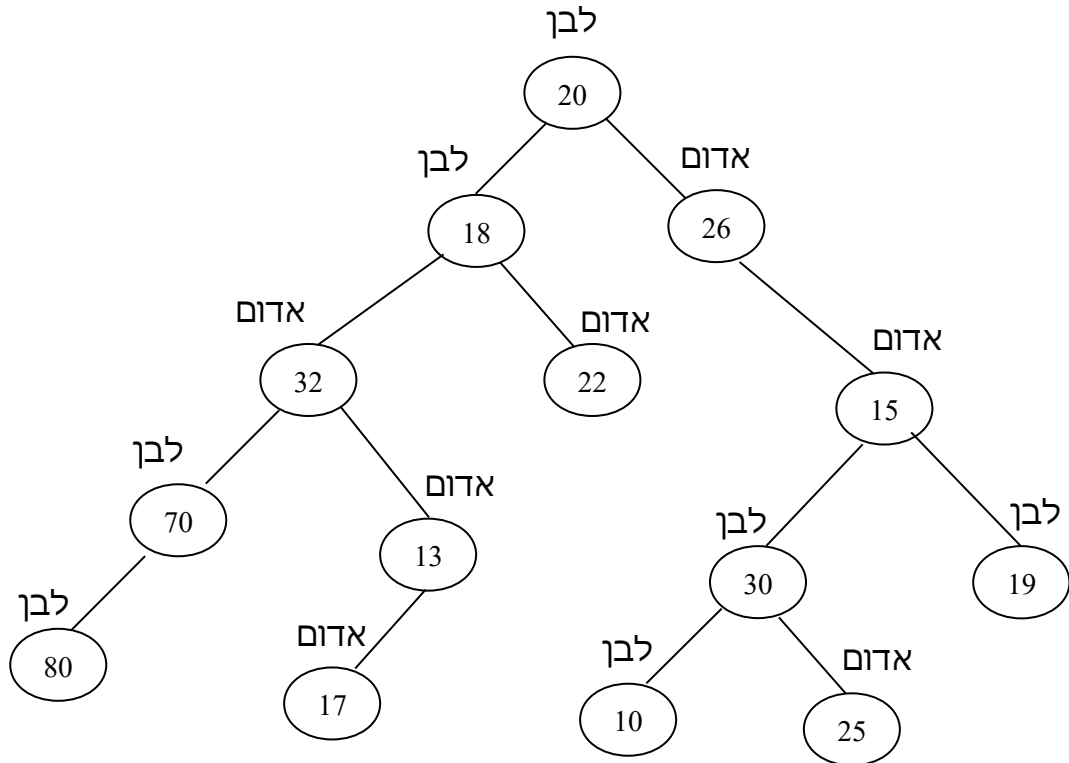
נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה שכתבת כתלות במספר הצמתים בעץ n .

הנחות ודרישות:

- אין להשתמש במבני עזר נוספים.
- מותר להשתמש במספר קבוע של משתנים (כמו למשל x, y, z).
- מותר להשתמש בפונקציות עזר, אך יש לכתוב את הפסיאודו-קוד של פונקציות העזר.
- כל צומת x בעץ מכיל את השדות הרגילים של עץ בינארי כפי שהוגדר בכיתה ובנוסף שדה $color(x)$ שמציין את צבע הצומת x .

דוגמה:

יהי T עץ בינארי אדום לבן שמתואר בציור הבא :



לאחר הקריאה לפונקציה $P1(T)$ יתקבל הפלט:

17 13 22 26 25
5

הסבר לפלט: צמתים 17,13,22,25 הם טובים כי אם אדומים ואין מתחתם צמתים לבנים. צומת 26 הוא טוב כי סכום הצמתים האדומים בתת העץ T_{26} הוא: $26+15+25=66$ וסכום זה גדול יותר מסכום הצמתים הלבנים בתת העץ T_{26} שהוא: $30+10+19=59$.

שאר הצמתים בעץ אינם טובים, למשל צומת 20 אינו טוב כי סכום הצמתים האדומים בתת העץ T_{20} הוא: $32+13+17+22+26+15+25=150$ והוא קטן יותר מסכום הצמתים הלבנים בתת העץ T_{20} שהוא: $80+70+18+20+30+10+19=247$.

מאחר ויש בעץ 5 צמתים טובים מודפס בסוף המספר 5 שמציין את מספר הצמתים הטובים בעץ.

2. (30 נקודות)

במערכת המחשוב של חברת eBay Inc. (חברה אמריקאית שמנהלת את אתר המכירות eBay), מנהלים מעקב אחרי פעולות המשתמשים באתר המכירות eBay.

לכל משתמש שומרים: שם המשתמש (משמש לזיהוי המשתמש), התאריך שבו הצטרף לאתר, כתובת המגורים של המשתמש שכוללת את המדינה אליה שיך המשתמש, וכן נתונים על כל פעולות הרכישה/מכירה/החזרה שביצע המשתמש באתר.

לכל רכישה שומרים: מאפייני הרכישה שכוללים את שם המשתמש של הקונה, שם המשתמש של המוכר, תאריך הרכישה, ושם המוצר שנרכש. בנוסף לכך שומרים את מחיר המוצר שנרכש.

שימו לב שרכישה של מוצר על ידי הקונה היא למעשה גם מכירה של המוצר על ידי המוכר.

לצורך השאלה יש להניח שבכל רכישה נרכש מוצר אחד בלבד.

לכל החזרה שומרים: מאפייני החזרה שכוללים את מאפייני הרכישה של המוצר שהוחזר ואת תאריך החזרה.

נגדיר שמכירה היא מכירה מוצלחת אם המוצר שנמכר במכירה זו לא הוחזר.

נגדיר את אחוז המכירות המוצלחות של משתמש כסך כל המכירות המוצלחות של המשתמש לחלק בסך כל המכירות של המשתמש כפול 100.

הערה: האופן בו נשמרים הנתונים הנ"ל אינו מפורט ויהיה עליך לצין אותו כחלק מפתרון השאלה.

המשך בעמוד הבא...

הצע/הציעי מבנה נתונים עבור המערכת הנ"ל ששומר את הנתונים הנ"ל ותומך בפעולות הבאות:

- הוספת/הוצאת הנתון שהתבצעה רכישה מסוימת מתבצעת בזמן $O(\log c + \log p)$ בממוצע כאשר c מציין את מספר המדינות שיש להן משתמשים באתר eBay ו- p מציין את מספר המשתמשים באתר eBay.
- הוספת/הוצאת הנתון שהתבצעה החזרה מסוימת, מתבצעת בזמן $O(1)$ בממוצע. שימו לב שבמקרה של החזרה יש לעדכן עבור המכירה המתאימה להחזרה זו, שהמכירה היתה לא מוצלחת. מצד שני במקרה של החזרה, לא מעדכנים את סך כל המכירות של המשתמש שמכר את המוצר, ולא מעדכנים את סך כל הרכישות של המשתמש שרכש את המוצר.
- בהינתן שם משתמש, הדפסת כל המשתמשים שהצטרפו לאתר באותה שנה בה הצטרף המשתמש, ממוינים לפי סך כל המוצרים שרכשו המשתמשים, מתבצעת בזמן $O(m)$ בממוצע כאשר m מציין את מספר המשתמשים ברשימה שתודפס.
- בהינתן שם מדינה, הדפסת שמות כל המשתמשים ששייכים למדינה זו ומכרו לפחות מוצר אחד, ממוינים לפי סך כל המוצרים שמכרו, מתבצעת בזמן $O(\log c + x)$ במקרה הגרוע, כאשר c מציין את מספר המדינות שיש להן משתמשים באתר eBay ו- x מציין את מספר המשתמשים ברשימה שתודפס.
- בהינתן שנה ומספר k , הדפסת k המשתמשים עם אחוזי המכירות המוצלחות הגבוהים ביותר בשנה זו, מתבצעת בזמן $O(q + k \log k)$ בממוצע, כאשר q מציין את מספר המשתמשים שמכרו מוצרים בשנה זו.
- בהינתן שם מוצר, הדפסת כל הרכישות של מוצר זה (ללא חשיבות לסדר הרכישות), מתבצעת בזמן $O(x)$ בממוצע, כאשר x מציין את מספר הרכישות ברשימה שתודפס.

בנוסף לתאור מבנה הנתונים שהצעת, תאר/י באופן מילולי איך מתבצעות שלושת הפעולות האחרונות.

3. (20 נקודות)

להלן פסיאודו קוד של פונקציה בשם $P3(n,m)$ שמקבלת כפרמטר מספרים n ו- m . הפונקציה קוראת לפונקצית עזר בשם $F(x)$ שמקבלת כפרמטר מספר x ומתוארת בהמשך.

נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה $P3(n,m)$ כתלות ב- n ו- m (במונחים של ה- O הקטן ביותר שאתה/את יודעת להשיג).

$P3(n,m)$

$y=0$

```
for (i = 1; i ≤ 2n; i=i*2) {
    if (i==1) {
        for (j = 1; j ≤ 2m2; j++) {
            y=y+F(j)
        }
    }
    y=y+F(m)
}
return y
```

$F(x)$

```
if (x≤1) {return 1}
s=0
for (i = 1; i ≤ x2; i++)
{
    s=s+i
}
return s+F( $\frac{2x}{3}$ )
```

4. (15 נקודות)

הוכח שלכל מספר שלם חיובי n שמתחלק ב-6 (ללא שארית) וגדול מ-32 קיים עץ בינארי שמקיים את כל ארבעת התנאים הבאים:

(1) מספר הצמתים בעץ הוא בדיוק n .

(2) גובה העץ גדול או שווה ל- $\frac{n}{3} + \log_2\left(\frac{n}{3}\right)$

(3) יש בעץ לפחות $\frac{n}{12}$ צמתים שהרמה שלהם

גדולה מ-3 $\frac{n}{6} + \log_2\left(\frac{n}{3}\right) - 3$

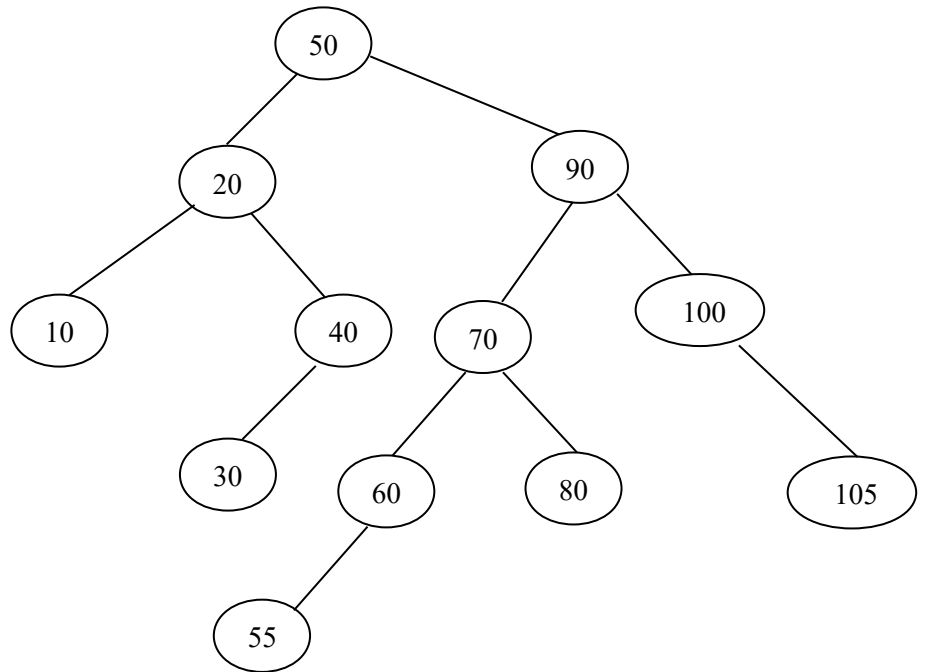
וקטנה מ-3 $\frac{n}{6} + \log_2\left(\frac{n}{3}\right) + 3$

(4) יש בעץ לפחות $\frac{5n}{12} - 1$ עלים.

5. (15 נקודות)

שאלה זו מתייחסת להוספה/הוצאה של איברים בעץ AVL לפי אלגוריתמי ההוספה/הוצאה שנלמדו בכיתה.

יהי T עץ AVL שמתואר בציור הבא :



א) ציר את העץ שיתקבל לאחר הוצאת הצומת 10 מהעץ המקורי T. (מספיק לצייר את העץ הסופי, אין צורך לצייר את שלבי הביניים).

ב) מהו המספר הקטן ביותר של צמתים שיש להוסיף לעץ T המקורי כדי לגרום לגלגול סביב השורש של העץ (דהינו גלגול סביב הצומת 50). נמק/י את תשובתך על ידי ציון מספרי הצמתים שצריך להוסיף לעץ כדי לגרום לגלגול הנדרש.

בהצלחה!