ביה״ס למדעי המחשב ומתמטיקה | המכללה האקדמית נתניה

סמסטר ב׳ תשע״ה

13.4.2015

# מבני נתונים
# פתרון תרגיל מס׳ 2

**1.** הוכח לפי הגדרה 2 ש-

$$\log_2((2n)!) = \theta(n \log n)$$

**פתרון**

$$\log_2((2n)!) = \log_2\left((2n)\cdot(2n-1)\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot(2n-2n+1)\right)$$

$$\log_2((2n)!) \le \log_2(2n\cdot 2n\cdot\ldots\cdot 2n) = \log_2(2n)^{2n} = 2n(\log_2(2n))$$

$$= 2n(\log_2 n + \log_2 2) = 2n(\log_2 n + 1) \le 2n(\log_2 n + \log_2 n)$$

בהנחה ש $n \ge 2$

$$= 4n\cdot\log_2 n$$

ולכן עבור $c=4$ ו- $n_0=2$ נקבל לפי הגדרה 2 ש-

$$\log_2((2n)!) = O(n\cdot\log n)$$

$$\log_2((2n)!) = \log_2\left((2n)\cdot(2n-1)\cdot\ldots\cdot n\cdot\ldots\cdot(2n-2n+1)\right)$$

$$\log_2((2n)!) \ge \log_2(\underbrace{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}_{n \text{ פעמים}}) = \log_2 n^n = n\cdot\log_2 n$$

ולכן עבור $c=1$ ו- $n_0=1$ נקבל לפי הגדרה 2 ש-

$$\log_2((2n)!) = \Omega(n\cdot\log n)$$

**.2**

נתח את סיבוכיות זמן הריצה (במונחים של θ ) של קטע הקוד הבא כתלות ב- n. נמק את תשובתך.

```
k=0
for (i=1; i ≤ n^3; i++) {
  for (j=4i ; j ≤ n^2; j++) {
    k++
  }
}
```

__פתרון__

$$T(n) = c_1 + c_2 \cdot n^3 + c_3\Big(\underset{i=1}{n^2-(4-1)} + \underset{i=2}{n^2-(8-1)} + \dots + \underset{i=\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor}{n^2-\left(4\cdot\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - 1\right)}\Big)$$

$$= c_1 + c_2 \cdot n^3 + c_3 (n^2+1)\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - 4 \cdot c_3 \left(1 + 2 + \dots + \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor\right)$$

$$= c_1 + c_2 \cdot n^3 + c_3 (n^2+1)\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - 2 \cdot c_3 \left(1 + \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor\right)\left(\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor\right) = \Theta(n^4)$$

**.3**

נתח את סיבוכיות זמן הריצה (במונחים של θ ) של קטע הקוד הבא כתלות ב- n. נמק את תשובתך.

```
k=0
for (i=1; i ≤ n^3; i++) {
  for (j=i^2 ; j ≤ 2n^2; j++) {
    k++
  }
}
```

**<u>פתרון</u>**

$$T(n) = c_1 + c_2 \cdot n^3 + c_3 \cdot \Big(\underbrace{2n^2 - (1^2 - 1)}_{i=1} + \underbrace{2n^2 - (2^2 - 1)}_{i=2} + \dots + \underbrace{2n^2 - \big((\lfloor\sqrt{2 \cdot n^2}\rfloor)^2 - 1\big)}_{i=\lfloor\sqrt{2 \cdot n^2}\rfloor}\Big)$$

$$= c_1 + c_2 \cdot n^3 + c_3 (2n^2 + 1)(\lfloor\sqrt{2 \cdot n^2}\rfloor) - c_3 \big(1^2 + 2^2 + \dots + (\lfloor\sqrt{2 \cdot n^2}\rfloor)^2\big)$$

$$= c_1 + c_2 \cdot n^3 + c_3 (2n^2 + 1)(\lfloor\sqrt{2 \cdot n^2}\rfloor) - c_3 \frac{(\lfloor\sqrt{2n^2}\rfloor)(\lfloor\sqrt{2 \cdot n^2}\rfloor + 1)(2 \cdot \lfloor\sqrt{2n^2}\rfloor + 1)}{6} = \Theta(n^3)$$

**.4**

נתח את סיבוכיות זמן הריצה (במונחים של $\theta$ ) של קטע הקוד הבא כתלות ב- **n**. נמק את תשובתך.

```
i=1
s=0
for (i=1; i ≤ n^3; i=i·2) {
   for (j=i ; j ≤ n^2; j++) {
     s++
   }
}
```

**<u>פתרון</u>**

נסמן ב-$x$ את מס הפעמים שנכנסים ללולאת ה-for החיצונית.

נסמן ב-$i_k$ את הערך של $i$ אחרי $k$ כניסות ללולאה החיצונית (בסוף הלולאה).

$$i_1 = 2 \;,\; i_2 = 2^2 \;,\; \dots \;,\; i_k = 2^k$$

אחרי איטרציה $x-1$, $i$ עדיין מקיים את התנאי של הכניסה ללולאה ולכן:

$$i_{x-1} = 2^{x-1} \le n^3$$

ולכן:

$$\log_2 2^{x-1} \le \log_2 n^3$$

$$x-1 \le 3\log_2 n$$

$$(1) \quad x \le 1 + 3\log_2 n$$

מספק שני אחרי איטרציה $x$, $i$ לא מקיים את התנאי, ולכן:

$$i_x = 2^x > n^3$$

$$x > \log_2 n^3$$

$$(2) \qquad x > 3\log_2 n$$

מ-(1) ו-(2) נובע ש-

$$x = 1 + \lfloor 3\log_2 n \rfloor$$

$$T(n) = c_1 + c_2\left(1 + \lfloor 3\log_2 n \rfloor\right) +$$

$$+ c_3\Big(\underbrace{n^2 - (1-1)}_{i=1} + \underbrace{n^2 - (2-1)}_{i=2} + \dots + \underbrace{n^2\left(2^{\lfloor 2\log_2 n \rfloor - 1} - 1\right)}_{i=2^{\lfloor 2\log_2 n \rfloor}}\Big) =$$

$$= c_1 + c_2\left(1 + \lfloor 3\log_2 n \rfloor\right) + c_3(n^2+1)\cdot\lfloor 2\log_2 n \rfloor -$$

$$- c_3\left(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{\lfloor 2\log_2 n \rfloor - 1}\right) =$$

$$= c_1 + c_2\left(1 + \lfloor 3\log_2 n \rfloor\right) + c_3(n^2+1)\cdot\lfloor 2\log_2 n \rfloor -$$

$$- c_3\left(2^{\lfloor 2\log_2 n \rfloor} - 1\right) = \Theta(n^2 \log n)$$

הערה: הסיבה ש-i רץ עד $2^{\lfloor 2\log_2 n \rfloor}$

בלולאה הפנימית היא כי i הוא ~~...~~ חזקה

של 2 וכל עוד מתקיים:

$$i = 2^y \le n^2$$

יכנס ללולאה הפנימית. ולכן הערך הגדול ביותר

של y האפשרי הוא:

$$2^y \le n^2$$

$$y \le \log_2 n^2 = 2\log n$$

מאחר ו-y הוא מס שלם אז $y = \lfloor 2\log_2 n \rfloor$

ולכן הערך הגדול ביותר האפשרי של i הוא $2^{\lfloor 2\log_2 n \rfloor}$

**.5**

נתח את סיבוכיות זמן הריצה (במונחים של θ) של קטע הקוד הבא כתלות ב- n ו- m. נמק את תשובתך.

```
x = 0
for (i = 1; i ≤ n^3; i++) {
  for (j = i^2; j ≤ n^2; j++) {
    x=x+1
  }
}
z=1
y=0
while (z ≤ 2^(2^(2x)))  {
   z = z * 2
   t=0
   for (i=1;i≤ m; i=i·3) {
      t++
   }
}
```

**פתרון**

נסמן ב-p את מס' הפעמים שנכנסים ללולאת ה-for הפנימית. הערך של p יהיה שווה לערך של x בסיום ביצוע 2 לולאות ה-for.

נחשב את p.

$$p = \underset{i=1}{n^2-(1^2-1)} + \underset{i=2}{n^2-(2^2-1)} + \dots + \underset{i=n}{n^2-(n^2-1)} =$$

$$= (n^2+1)\cdot n - (1^2+2^2+3^2+\dots+n^2) =$$

$$= n^3+n - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3}{3} - \frac{3n^2}{6} + \frac{5n}{6}$$

נסמן ב-t את מס' הפעמים שנכנסים ללולאת ה-while.

נסמן ב-$z_k$ את הערך של z אחרי k ניסיונות ללולאת ה-while. $z_k = 2^k$

לאחר t-1 ניסיונות ללולאת ה-while עדיין מתקיים התנאי. לכן:

$$z_{t-1} = 2^{t-1} \le 2^{2^{2x}}$$

$$t-1 \le 2^{2x}$$

$$(1) \quad t \le 2^{2x}+1$$

מצד שני, לאחר t ניסיונות ללולאה התנאי לא מתקיים:

$$z_t = 2^t > 2^{2^{2x}}$$

$$(2) \quad t > 2^{2x}$$

מ-(1) ו-(2) נקבל: $t = 1+2^{2x}$

באופן דומה נקבל שעבור כל כניסה ללולאת

ה-while מס' הפעמים שיכנסו ללולאת ה-for

שבתוכה הוא: $1 + \lfloor \log_3 m \rfloor$

לסיכום נקבל:

$$T(n) = c_1 + c_2 \cdot n^3 + c_3 \cdot x + c_4 \cdot t +$$

$$+ c_5 \cdot t \cdot \left(1 + \lfloor \log_3 m \rfloor\right) =$$

$$= c_1 + c_2 \cdot n^3 + c_3 \cdot \left(\frac{2n^3}{3} - \frac{3n^2}{6} + \frac{5n}{6}\right) +$$

$$+ c_4 \cdot \left(1 + 2^{2 \cdot \left(\frac{2n^3}{3} - \frac{3n^2}{6} + \frac{5n}{6}\right)}\right) +$$

$$+ c_5 \cdot \left(1 + 2^{2\left(\frac{2n^3}{3} - \frac{3n^2}{6} + \frac{5n}{6}\right)}\right)\left(1 + \lfloor \log_3 m \rfloor\right) =$$

$$= \Theta\left(2^{2\left(\frac{2n^3}{3} - \frac{3n^2}{6} + \frac{5n}{6}\right)} \cdot \log m\right)$$