3.5.2015

מבני נתונים
פתרון תרגיל מס׳ 3

1. שאלה זו הופיעה במועד א 2014

להלן פסיאודו קוד של פונקציה בשם P1(n) שמקבלת כפרמטר מספר n.
הפונקציה קוראת לפונקצית עזר בשם F(m) שמקבלת כפרמטר מספר m ומתוארת בהמשך . נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה P1(n) כתלות ב- n (במונחים של ה- O הקטן ביותר שאתה/את יודע/ת להשיג).

```
P1(n)
-------
x=0
for (i = 1; i ≤ n; i++) {
  for (j = 1; j ≤ i; j++) {
     x=x+F(i)
  }
}
return x


F(m)
-------
s=0
for (i = 1; i ≤ 2^m; i=i*2)
   {
      s++
   }
return s
```

פתרון

$$T_F(m) = d_1 + d_2 \cdot x$$

x - מספר הכניסות ללולאה

נסמן ב- i_x את הערך של המשתנה i לאחר הכניסה ה-x ללולאה בסוף הלולאה.

$$i_1 = 2^1$$

$$i_2 = 2^2$$

$$\vdots$$

$$i_k = 2^k$$

לכן

$$i_x = 2^x \qquad i_{x-1} = 2^{x-1}$$

$$2^x > 2^m \qquad 2^{x-1} \le 2^m$$

$$x > m \qquad x - 1 \le m$$

$$x \le m+1$$

ומכך ש-x מספר שלם נקבל:

$$x = m + 1 \qquad T_F(m) \le d_1 \cdot m$$

$$T_F(m) = d_1 + d_2 \cdot (m+1) = \Theta(m) \qquad T_F(m) \ge d' \cdot m$$

$$T(n) = c_1 + c_2 \cdot n + c_3 \, (\underset{i=1}{1} + \underset{i=2}{2} + \underset{i=3}{3} + \dots + n) + T_F(1) + T_F(2) \cdot 2 + \dots + T_F(n) \cdot n$$

$$T(n) \le c_1 + c_2 \cdot n + c_3 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + d \, (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$$

$$= c_1 + c_2 n + c_3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + d \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \Theta(n^3)$$

לכן הראנו ש $T(n) = O(n^3)$

2. שאלה זו הופיעה במועד ב 2014

להלן פסיאודו קוד של פונקציה בשם P2(n) שמקבלת כפרמטר מספר n.
הפונקציה קוראת לפונקצית עזר בשם F(m) שמקבלת כפרמטר מספר m ומתוארת בהמשך . נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה P2(n) כתלות ב- n (במונחים של ה- O הקטן ביותר שאתה/את יודע/ת להשיג).

```
P2(n)
-------
x=0
for (i = 1; i ≤ n; i++) {
  for (j = 1; j ≤ n; j++) {
     x=x+F(i)
  }
}
return x


F(m)
-------
s=0
for (i = 1; i ≤ 2^m; i=i*2)
   {
   for (j = 1; j ≤ 2^(2m); j=j*2)
     {
        s++
     }
   }
return s
```

__פתרון__

$$T_F(m) = d_1 + d_2 \cdot x + d_3 \cdot y \cdot x$$

x - מספר הכניסות ללולאה החיצונית

נסמן ב- i_k את הערך של המשתנה i לאחר הכניסה ה-k ללולאה בסוף הלולאה

$$i_1 = 2^1$$
$$i_2 = 2^2$$
$$\vdots$$
$$i_k = 2^k$$

לכן

$$i_x = 2^x$$
$$2^x > 2^m$$
$$x > m$$

$$i_{x-1} = 2^{x-1}$$
$$2^{x-1} \leq 2^m$$
$$x-1 \leq m$$
$$x \leq m+1$$

ומכאן ש-x מספר שלם נקבל:

$$x = m+1$$

y - מספר הכניסות ללולאה הפנימית עבור כל כניסה ללולאה החיצונית

נסמן ב- i_b את הערך של המשתנה i לאחר הכניסה ה-b ללולאה בסוף הלולאה

$$i_1 = 2^1$$
$$i_2 = 2^2$$
$$\vdots$$
$$i_b = 2^b$$

לכן

$$i_y = 2^x \qquad i_{y-1} = 2^{x-1}$$
$$2^y > 2^{2m} \qquad 2^{y-1} \le 2^{2m}$$
$$y > 2m \qquad y-1 \le 2m$$
$$y \le 2m+1$$

ומכיון ש y מספר שלם נקבל:

$$y = 2m+1$$

$$T_F(m) \le d \cdot m^2$$

$$T_F(m) = d_1 + d_2(m+1) + d_3(m+1)(2m+1) = \Theta(m^2)$$

$$T(n) = c_1 + c_2 \cdot n + c_3 \cdot n^2 + T_F(1)\cdot n + T_F(2)\cdot n + \dots + T_F(n)\cdot n$$
$$\le c_1 + c_2 \cdot n + c_3 \cdot n^2 + dn(1^2 + 2^2 + \dots n^2)$$
$$\le c_1 + c_2 n + c_3 n^2 + \frac{dn^2(n+1)(2n+1)}{6} = \Theta(n^4)$$

ולכן הזמן ש- $T(n) = O(n^4)$.

3. שאלה זו הופיעה במועד ג 2014

להלן פסיאודו קוד של פונקציה בשם P3(n) שמקבלת כפרמטר מספר n.
הפונקציה קוראת לפונקצית עזר בשם F(m) שמקבלת כפרמטר מספר m ומתוארת בהמשך . נתח/י את סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה P3(n) כתלות ב- n (במונחים של ה- O הקטן ביותר שאתה/את יודע/ת להשיג).

```
P3(n)
-------
x=0
for (i = 1; i ≤ n; i++) {
  for (j = 1; j ≤ i; j++) {
     x=x+F(j)
  }
}
return x
```

```
F(m)
-------
s=0
for (i = 1; i ≤ m; i++)
   {
   for (j = 1; j ≤  2^(m^2)  ; j=j*2)
     {
        s++
     }
   }
return s
```

בפתרון השאלה ניתן להיעזר בנוסחאות הבאות (לא בהכרח יש צורך להשתמש בכל הנוסחאות):

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=(1/6)\cdot n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)$$
$$1^3+2^3+\ldots+n^3=(1/4)\cdot n^2\cdot(n+1)^2$$
$$1^2\cdot n+2^2\cdot(n-1)+3^2\cdot(n-2)+\ldots+n^2\cdot 1=\theta(n^4)$$
$$1^3\cdot n+2^3\cdot(n-1)+3^3\cdot(n-2)+\ldots+n^3\cdot 1=\theta(n^5)$$

פתרון

$$T_F(m) = d_1 + d_2 \cdot m + d_3 \cdot X \cdot m$$

X - מספר הכניסות ללולאה הפנימית עבור כל כניסה ללולאה החיצונית

נסמן ב i_K את הערך של המשתנה i לאחר הכניסה ה K ללולאה בסוף הלולאה.

$$i_1 = 2^1$$
$$i_2 = 2^2$$
$$\vdots$$
$$i_K = 2^k$$

לכן

$$i_{X-1} = 2^{X-1} \qquad\qquad i_X = 2^X$$
$$2^{X-1} \le 2^{(m^2)} \qquad\qquad 2^X > 2^{(m^2)}$$
$$X-1 \le m^2 \qquad\qquad X > m^2$$
$$X \le m^2+1$$

ומכאן ש-X מספר שלם נקבל:

$$X = m^2+1$$

$T_F(m) \le dm^3$

$$T_F(m) = d_1 + d_2 \cdot m + d_3 \cdot m(m^2+1) = \Theta(m^3)$$

$$T(n) = C_1 + C_2 \cdot n + C_3\,(1+2+\dots+n) + F(1)\cdot n + F(2)\cdot(n-1) \dots + F(n)\cdot(1)$$
$$\le C_1 + C_2 \cdot n + \cancel{C_3 \cdot \frac{n(n+1)}{2}} + d\,(1^3 \cdot n + 2^3(n-1) + \dots + n^3 \cdot 1)$$
$$\le C_1 + C_2 \cdot n + \frac{1}{2} C_3 \cdot (n^2+n) + d\,(1^3 \cdot n + 2^3(n-1) + \dots + n^3 \cdot 1) =$$
$$= \Theta(n^5)$$

$\Theta(n^5)$ לפי הנוסחה

לכן הראינו $T(n) = O(n^5)$

.4

להלן תוכנית רקורסיבית בשם P4 שמקבלת פרמטרים מערך A ומספר k.

נתח את סיבוכיות זמן הריצה (במונחים של θ) של התוכנית כתלות ב- n, כאשר n מציין את גודל המערך A שמועבר לפונקציה כפרמטר.

<u>P2(A,k)</u>

n = length(A)

if n == 1 return A[1]

if n ==2 return A[2]

if A[$\lceil \frac{n}{2} \rceil$] == k return A[$\lceil \frac{n}{2} \rceil$]

if A[ ]) > k return P2(A[1: $\lceil \frac{n}{3} \rceil$], k) + P2(A[$\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor + 1$:n], k)

if A[ ]) < k return P2(A[1: $\lceil \frac{n}{4} \rceil$], k)

<u>פתרון</u>

תחילה נחשב את מספר האיברים במערך $A\left[\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor + 1 : n\right]$

$$n-\left(\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor+1\right)+1 = n-\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor = \left\lceil n-\frac{2n}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$$

לפי הנוסחא: $n - \lfloor x \rfloor = \lceil n - x \rceil$

$$T(n) \le c_1 + T\left(\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil\right).$$

$$T(n) \le c_1 + 2\cdot T\left(\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil\right)$$

מכאן נמשיך עם הנוסחה : $T(n) \le c_1 + 2T\left(\frac{n}{3}\right)$

$$T(n) \le c_1 + 2 \cdot T\left(\frac{n}{3}\right)$$

$$\le c_1 + 2\left(c_1 + 2T\left(\frac{n}{3^2}\right)\right) \le 3c_1 + 4T\left(\frac{n}{9}\right)$$

$$c_1(1+2) + 2^2 T\left(\frac{n}{3^2}\right)$$

$$\le 3c_1 + 4\left(c_1 + 2T\left(\frac{n}{3^3}\right)\right) \le 7c_1 + 8T\left(\frac{n}{27}\right)$$

$$c_1(1+2+2^3) + 2^3 T\left(\frac{n}{3^3}\right)$$

$$\vdots$$

<u>לכן באופן כללי</u>:

$$T(n) \le c_1(1+2^1+\cdots+2^{i-1}) + 2^i T\left(\frac{n}{3^i}\right)$$

לכן לפי הנוסחה: $\frac{q^{m+1}-1}{q-1}$

$$T(n) \le c_1(2^i-1) + 2^i T\left(\frac{n}{3^i}\right)$$

נבחר i שמקיים: $\frac{n}{3^i} = 1$

$$n = 3^i$$

$$\log_3 n = i$$

נציב: $T(n) \le c_1(2^{\log_3 n}-1) + 2^{\log_3 n} \cdot T(1)$

מהגדרת ה c_1 נובע $T(1) \le c_1$

$$T(n) \le c_1(2^{\log_3 n}-1) + 2^{\log_3 n} \cdot c_1$$

$$T(n) \le c_1(2 \cdot 2^{\log_3 n} - 1) = \Theta(n^{\log_3 2})$$

ולכן [illegible] ש-

$$T(n) = \Theta(n^{\log_3 2})$$

ההסבר לחישוב הקודם הוא:

$$2^{\log_3 n} = 2^{\frac{\log_2 n}{\log_2 3}} = \left(2^{\log_2 n}\right)^{\frac{1}{\log_2 3}} =$$

$$= n^{\frac{1}{\log_2 3}} = n^{\log_3 2}$$

$$T(n) \geq 1 + 2T\left(\frac{n}{3}\right)$$

$$\geq 1 + 2\left(1 + 2T\left(\frac{n}{3^2}\right)\right) \geq 3 + 4T\left(\frac{n}{9}\right)$$

$$\geq 3 + 4\left(1 + 2T\left(\frac{n}{3^3}\right)\right) \geq 7 + 8T\left(\frac{n}{27}\right)$$

$$\vdots$$

באופן כללי:

$$\geq (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{i-1}) + 2^i T\left(\frac{n}{3^i}\right)$$

$$\geq 2^i - 1 + 2^i T\left(\frac{n}{3^i}\right)$$

נבחר i שמקיים:

$$\frac{n}{3^i} = 1$$

$$n = 3^i$$

$$\log_3 n = i$$

נקבל:

$$T(n) \geq 2^{\log_3 n} - 1 + 2^{\log_3 n} \cdot T(1)$$

$$T(1) \geq 1$$

$$T(n) \geq 2 \cdot 2^{\log_3 n} - 1 = \Theta\left(n^{\log_3 2}\right)$$

ולכן הראשון ש- $T(n)=\Omega(n^{\log_3 2})$
ולסיכום הראשון ש- $T(n)=\Theta(n^{\log_3 2})$

.5

נתונה נוסחת הנסיגה הבאה:

$$T(n)=3T\left(\frac{n}{3}\right)+3^{\frac{n}{3}}$$

כאשר $T(i)=0$ עבור $i<1$.

העריך/העריכי את $T(n)$ במונחים של θ. הוכח/הוכיחי את תשובתך.

אין להשתמש במשפט המסטר לפתרון שאלה זו (את משפט המסטר תלמדו בהרצאה שמיד לאחר חופשת פסח).

<u>רמז:</u>

לצורך הפתרון ניתן להשתמש בכך שהנוסחה הבאה נכונה עבור $2\leqslant i\leqslant \log_3(n)$:

ועבור $n>50$

$$3^{\frac{n}{3^i}+i-1-\frac{n}{3}}\leqslant\frac{1}{3^i}$$

ניתן להשתמש בנוסחה בסגנון דומה לצורך הפתרון בתנאי שהיא תהיה נכונה.

<u>פתרון</u>

5) $T(n) = 3T\left(\frac{n}{3}\right) + 3^{\frac{n}{3}}$

$T(i) = 0$

$i < 1$

הנוסחא הבאה נכונה עבור $2 \le i \le \log_3(n)$:

ועבור $n > 50$:

$$3^{\frac{n}{3^i} + i - 1 - \frac{n}{3}} \le \frac{1}{3^i}$$

נציב $\frac{n}{3}$:

$$T\left(\frac{n}{3}\right) = 3T\left(\frac{n}{3^2}\right) + 3^{\frac{n}{3^2}}$$

$$T(n) = 3\left(3T\left(\frac{n}{3^2}\right) + 3^{\frac{n}{3^2}}\right) + 3^{\frac{n}{3}} = 3^2T\left(\frac{n}{3^2}\right) + 3^{\frac{n}{3^2}+1} + 3^{\frac{n}{3}}$$

נציב $\frac{n}{3^2}$:

$$T\left(\frac{n}{3^2}\right) = 3T\left(\frac{n}{3^3}\right) + 3^{\frac{n}{3^3}}$$

$$T(n) = 3^2\left(3T\left(\frac{n}{3^3}\right) + 3^{\frac{n}{3^3}}\right) + 3^{\frac{n}{3^2}+1} + 3^{\frac{n}{3}} =$$

$$= 3^3T\left(\frac{n}{3^3}\right) + 3^{\frac{n}{3^3}+2} + 3^{\frac{n}{3^2}+1} + 3^{\frac{n}{3}}$$

לכן

$$T(n) = 3^i \cdot T\left(\frac{n}{3^i}\right) + 3^{\frac{n}{3^i}+i-1} + 3^{\frac{n}{3^{i-1}}+i-2} + \dots + 3^{\frac{n}{3}}$$

$$= 3^i \cdot T\left(\frac{n}{3^i}\right) + 3^{\frac{n}{3}}\left(3^{\frac{n}{3^i}+i-1-\frac{n}{3}} + 3^{\frac{n}{3^{i-1}}+i-2-\frac{n}{3}} + \dots + 1\right)$$

נציב ברמז $i-1$ במקום i

$$3^{\frac{n}{3^{i-1}}+i-2-\frac{n}{3}} \leq \frac{1}{3^{i-1}}$$

$$\leq 3^{\frac{n}{3}}\left(\frac{1}{3^i}+\frac{1}{3^{i-1}}+\ldots+1\right) \leq 3^{\frac{n}{3}}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right) = 3^{\frac{n}{3}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}$$

נחפש i שעבורו מתקיים:

$$\frac{n}{3^i}=1$$

$$n=3^i$$

$$\log_3 n = i$$

$$T(n) \leq 3^i \cdot T\left(\frac{n}{3^i}\right)+3^{\frac{n}{3}}\cdot 1\tfrac{1}{2}$$

נציב:

$$T(n) \leq 3^{\log_3 n}\cdot T(1)+3^{\frac{n}{3}}\cdot 1\tfrac{1}{2} = \Theta\left(3^{\frac{n}{3}}\right)$$

$$T(1)=3^{\frac{1}{3}}$$

ולכן $T(n)=O(3^{\frac{n}{3}})$

כיוון שני:

$$T(n) \geq 3^i\, T\left(\frac{n}{3^i}\right)\cdot 3^{\frac{n}{3}}$$

נציב:

$$T(n) \geq 3^{\log_3 n}\cdot T(1)+3^{\frac{n}{3}} = 3^{\log_3 n}\cdot 3^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{n}{3}} = \Theta\left(3^{\frac{n}{3}}\right)$$

ולכן $T(n)=\Omega(3^{\frac{n}{3}})$

ולכן הראינו ש

$$T(n)=\Theta\left(3^{\frac{n}{3}}\right)$$