מטריצות

הגדרה. מערך דו-מימדי (או טבלה מלבנית) של מספרים (סקלרים) שבו יש m שורות ו n עמודות נקרא מטריצה מסדר $m\times n$. רישום

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & .... & A_{1n-1} & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & .... & A_{2n-1} & A_{2n} \\ ... & ... & .... & ... & ... \\ A_{m1} & A_{m2} & .... & A_{mn-1} & A_{mn} \end{pmatrix}.$$

המספרים A_{ij} נקראים רכיבי המטריצה. האינדקס הראשון הוא מספר השורה והאינדקס השני הוא מספר העמודה שבהן נמצא הרכיב. שורה ה- i של המטריה תסומן כ- A_i, עמודה ה- j מסומנת כ- A^j.

דוגמא. נביט במטריצה מסדר 2×3: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. אז

$$A_{11}=1, A_{12}=2, A_{13}=3,$$
$$A_{21}=4, A_{22}=5, A_{23}=6,$$
$$A_1=(1,2,3), A_2=(4,5,6).$$
$$A^1=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, A^2=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, A^3=\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix},$$

שתי המטריצות A,B שוות אם רק אם יש להן אותו סדר (ז"א מספר השורות שווה ומספר העמודות שווה) והרכיביהן שווים בהתאם, ז"א $A_{ij}=B_{ij}$ לכל i,j.

הגדרה. מטריצה שבה יש שורה אחת (עמודה אחת) נקראת מטריצת-שורה (מטריצת-עמודה). מטריצה ריבועית מסדר n היא מטריצה שיש לה n שורות ו n עמודות.

קבוצה של כל המטריצות מסדר $m\times n$ שכריביהן שייכם לקבוצה S מסומנת כ- $M_{m\times n}(S)$.

חיבור מטריצות.

אם $A,B\in M_{m\times n}(\mathbf{R})$ שתי מטריצות מסדר זהה אז ניתן לחבר אותן. כתוצאה מתקבלת מטריצה $C\in M_{m\times n}(\mathbf{R})$ שרכיביה מוגדרים ע"י הנוסחה $C_{ij}=A_{ij}+B_{ij}$. במילים אחרות $(A+B)_{ij}:=A_{ij}+B_{ij}$ לכל $1\le i\le m, 1\le j\le n$.

הערה. לא מוגדר חיבור בין המטריצות מסדרים שונים.

תכונות החיבור.

1. חוק קומוטטיבי (חוק החילוף) $A,B\in M_{m\times n}(\mathbf{R})\Rightarrow A+B=B+A$.

2. חוק אסיציאטיבי (חוק הקיבוץ) $A,B,C\in M_{m\times n}(\mathbf{R})\Rightarrow (A+B)+C=A+(B+C)$.

3. מטריצת-אפס. $A \in M_{m\times n}(\mathbf{R}) \Rightarrow A + O_{mn} = A$.

4. מטריצה נגדית $A -$ למטריצה $A \in M_{m\times n}(\mathbf{R})$ מוגדרת כ- $(-A)_{ij} = -A_{ij}$. היא מקיימת את התכונה $A \in M_{m\times n}(\mathbf{R}) \Rightarrow A + (-A) = O_{mn}$.

כפל בסקלר

אם $A \in M_{m\times n}(\mathbf{R})$ מטריצה כלשהי ו $a \in \mathbf{R}$ סקלד כלשהו אז ניתן להגדיר כפל בינהם. כתוצאה מתקבלת מטריצה $C \in M_{m\times n}(\mathbf{R})$ שרכיביה מוגדרים ע"י הנוסחה $C_{ij} = aA_{ij}$. במילים אחרות $(aA)_{ij} := aA_{ij}$ לכל $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$.

תכונות כפל בסקלר.

1. חוק אסוציאטיבי. $A \in M_{m\times n}(\mathbf{R}), a, b \in \mathbf{R} \Rightarrow (ab)A = a(bA)$.
2. חוק היחידה $A \in M_{m\times n}(\mathbf{R}) \Rightarrow 1 \cdot A = A$.
3. חוק דיסטריבוטיבי (חוק הפילוג) שמאלי $A \in M_{m\times n}(\mathbf{R}), a, b \in \mathbf{R} \Rightarrow (a+b)A = aA + bA$.
4. חוק דיסטריבוטיבי ימני $A, B \in M_{m\times n}(\mathbf{R}), a \in \mathbf{R} \Rightarrow a(A+B) = aA + aB$.

כפל מטריצות.

משתי מטריצות A, B ניתן לבנות את מכפלתן $A \cdot B$ כאשר מספר העמודות של המטריצה A שווה למספר השורות של B . אם A מסדר $m \times n$ ו B מסדר $n \times k$ אז $A \cdot B$ תהיה מטריצה מסדר $m \times k$ שרכיביה מוגדרים כדלקמן:

$$\boxed{(A\cdot B)_{ij} = \sum_{s=1}^{n} A_{is}B_{sj} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \ldots + A_{in}B_{nj} \qquad (3.1)}$$

במילים אחרות הררכיב ה- (i, j) של AB מתקבל כאשר נכפיל שורה ה-i של A בעמודה ה-j של B :

השורה ה-i

העמודה ה-j

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boxed{A_{i1} \;\; A_{i2} \;\; \cdots \;\; A_{in}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{מטריצה } A} \underbrace{\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1j} & \cdots & B_{1k} \\ B_{21} & \cdots & B_{2j} & \cdots & B_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{n1} & \cdots & B_{nj} & \cdots & B_{nk} \end{pmatrix}}_{\text{מטריצה } B}$$

מהנוסחה (3.1) נובע

$$(AB)_i = A_i B,$$
$$(AB)^j = AB^j$$

דוגמא.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 100 & 1000 \\ 10000 & 100000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 100 + 3\cdot 10000 & 1\cdot 10 + 2\cdot 1000 + 3\cdot 100000 \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 100 + 6\cdot 10000 & 4\cdot 10 + 5\cdot 1000 + 6\cdot 100000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30201 & 302010 \\ 60504 & 605040 \end{pmatrix}$$

הנוסחה (3.1) ניתן לכתוב גם בצורה $(AB)_{ij} = A_i \cdot B^j$ (נציין שכפל מטריצות בצד ימין של השוויון מוגדר, כי A_i מטריצת-שורה מסדר $1\times n$ ו B^j מטריצת-עמודה מסדר $n\times 1$).

משפט (חוק אסיציאטיבי לכפל מטריצות).
לכל שלוש מטריצות $A\in M_{m\times n}(\mathbf{R}), B\in M_{n\times k}(\mathbf{R}), C\in M_{k\times l}(\mathbf{R})$ ממהסדרים מתאימים מתקיים $A(BC)=(AB)C$.
לפני הוכחת המשפט נוכיח טענת העזר הבאה:

לכל מטריצה (מערך דו-מימדי) $M=\left(M_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le p,\\ 1\le j\le q}}$ מסדר $p\times q$ מתקיים $\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{q} M_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{q}\left(\sum_{i=1}^{p} M_{ij}\right)=S$

כאשר S מסמן את סכום של כל רכיבי המטריצה M.
הוכחה.

הסכום שנמצא בצד שמאל של שוויון הינו

$$\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{q} M_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{p}(M_{i1}+M_{i2}+\ldots+M_{iq})=$$
$$(M_{11}+M_{12}+\ldots+M_{1q})+(M_{21}+M_{22}+\ldots+M_{2q})+\ldots+(M_{p1}+M_{p2}+\ldots+M_{pq})=S$$

באופן דומה הסכום שנמצא בצד ימין של שוויון שווה ל:

$$\sum_{j=1}^{q}\left(\sum_{i=1}^{p} M_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{q}(M_{1j}+M_{2j}+\ldots+M_{pj})=$$
$$(M_{11}+M_{21}+\ldots+M_{p1})+(M_{12}+M_{22}+\ldots+M_{p2})+\ldots+(M_{1q}+M_{2q}+\ldots+M_{pq})=S$$

מ.ש.ל.

בעתיד נכתוב את $\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} M_{ij}$ במקום $\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{q} M_{ij}\right)$.

הוכחה של החוק האסוציאטיבי.
כל לבדוק שכל אחת מהמטריצות $A(BC),(AB)C$ היא מסדר $m\times l$. נוכיח שוויון בין הרכיבים

$$\left(A(BC)\right)_{ij}=\sum_{s=1}^{n} A_{is}(BC)_{sj}=\sum_{s=1}^{n} A_{is}\left(\sum_{t=1}^{k} B_{st}C_{tj}\right)=\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{k} A_{is}B_{st}C_{tj},$$
$$\left((AB)C\right)_{ij}=\sum_{t=1}^{k}(AB)_{it}C_{tj}=\sum_{t=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{n} A_{is}B_{st}\right)C_{tj}=\sum_{t=1}^{k}\sum_{s=1}^{n} A_{is}B_{st}C_{tj}.$$

מטענת עזר נובע ש- $\left(A(BC)\right)_{ij}=\left((AB)C\right)_{ij}$. מ.ש.ל.

מהמשפט הזה נובע חוק אסוציאטיבי מורחב:
אם ניתן להכפיל מטריצות $A_1, A_2, \ldots, A_k$ בסדר הנתון אז מכפלתן לא תלויה בסדר הסוגריים (לא נוכיח אותו כעט). למשל: $A(B(CD))=(AB)(CD)=(A(BC))D=A((BC)D)=((AB)C)D$.

חוק קומוטטיבי לא מתקיים עבור כפל מטריצות. למשל $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$.

משפט (חוקים דיטריבוטיביים)

לכל שלוש מטריצות $A\in M_{m\times n}(\mathbf{R}), B,C\in M_{n\times k}(\mathbf{R})$ מתקיים $A(B+C)=AB+AC$ (חוק פילוג שמאלי),

לכל שלוש מטריצות $A\in M_{k\times m}(\mathbf{R}), B,C\in M_{n\times k}(\mathbf{R})$ מתקיים $(B+C)A=BA+CA$ (חוק פילוג ימני).

נוכיח רק את הראשון (השני יש להוכיח בבית).

קל לבדוק שסדרים של המטריצות $A(B+C), AB+AC$ שוות ל- $m\times k$. נשווה את הרכביהן.

$$\left(A(B+C)\right)_{ij}=\sum_{s=1}^{n}A_{is}(B+C)_{sj}=\sum_{s=1}^{n}A_{is}(B_{sj}+C_{sj})=\sum_{s=1}^{n}(A_{is}B_{sj}+A_{is}C_{sj})=$$
$$\sum_{s=1}^{n}A_{is}B_{sj}+\sum_{s=1}^{n}A_{is}C_{sj}=(AB)_{ij}+(AC)_{ij}=(AB+AC)_{ij}$$

מ.ש.ל.

משפט. לכל שתי מטריצות $A\in M_{m\times n}(\mathbf{R}), B\in M_{n\times k}(\mathbf{R})$ וכל סקלר $c\in\mathbf{R}$ מתקיים $c(AB)=(cA)B=A(cB)$.

הוכחה.

$$\left(c(AB)\right)=c(AB)_{ij}=c\sum_{s=1}^{n}A_{is}B_{sj}=\sum_{s=1}^{n}cA_{is}B_{sj}=\sum_{s=1}^{n}(cA)_{is}B_{sj}=\left((cA)B\right)_{ij},$$
$$\left(c(AB)\right)=c(AB)_{ij}=c\sum_{s=1}^{n}A_{is}B_{sj}=\sum_{s=1}^{n}cA_{is}B_{sj}=\sum_{s=1}^{n}A_{is}cB_{sj}=\sum_{s=1}^{n}A_{is}(cB)_{sj}=\left(A(cB)\right)_{ij}$$

מ.ש.ל.

הגדרה. מטריצה ריבועית מסדר n שכל אברי האלכסון שלה שווים ל-1 ושאר הרכיבים שווים ל-0 נקראת מטריצת-היחידה ומסומנת כ- I_n. באופן פורמלי $\left(I_n\right)_{ij}=\begin{cases}1, i=j\\0, i\neq j\end{cases}$. למשל

$$I_1=(1), I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

טענה. לכל מטריצה $A\in M_{m\times n}(\mathbf{R})$ מתקיים $I_mA=A, AI_n=A$.

הוכחה. נוכיח רק את השוויון הראשון.

$$(I_mA)_{ij}=\sum_{s=1}^{m}(I_m)_{is}A_{sj}=(I_m)_{ii}A_{ij}=A_{ij}$$ מ.ש.ל.

מטריצה משוחלפת.

המטריצה המשוחלפת A^T למטריצה $A \in M_{m\times n}(\mathbf{R})$ היא מטריצה מסדר $n\times m$ שרכיביה מוגדרים ע"י הנוסחה $(A^T)_{ij} = A_{ji}$.

תכונות

1. $(A^T)^T = A$.

הוכחה: $\left((A^T)^T\right)_{ij} = (A^T)_{ji} = A_{ij}$.

2. $(A+B)^T = A^T + B^T$.

הוכחה: $\left((A+B)^T\right)_{ij} = (A+B)_{ji} = A_{ji} + B_{ji} = (A^T)_{ij} + (B^T)_{ij} = (A^T + B^T)_{ij}$.

3. $(bA)^T = bA^T$.

4. $(AB)^T = B^T A^T$.

הוכחה: $\left((AB)^T\right)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{s=1}^{n} A_{js}B_{si} = \sum_{s=1}^{n} B_{si}A_{js} = \sum_{s=1}^{n} (B^T)_{is}(A^T)_{sj} = (B^T A^T)_{ij}$.