NETANYA ACADEMIC COLLEGE
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

המכללה האקדמית נתניה
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

מבחן אמצע באלגברה לינארית ב למדעי המחשב-הנדסאים התשס"ו.

יום ד, כב כסלו התשס"ז 13-12-2006

- מורה: גיורא דולה, מתרגל: רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שעתיים
- מותרים מחשבונים
- התשובות לכל השאלות תכתנה במחברת.

בהצלחה.

שאלה 1(51 מקודות):

עבור כל אחד מהסעיפים הבאים, בדק במחברתך האם W הוא תת מרחב של V.

א. $F=R, V=C[a,b], W=\{f \mid f(a)\cdot f(b)=0\}$

תזכורת : C[a,b] הוא אסף הפונקציות הרציפות מהקטע [a,b] לממשיים.

ב. $F=Z_5, V=M_{4,4}(Z_5), W=\{A\in V, A=-A^T\}$

תזכורת: $M_{4,4}$ הוא אסף המטריצות 4x4.

ג. $F=R, V=R^3, W=\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, x^2+(y+z)^2=0\}$

שאלה 2 (32 נקודות)

עבור כל אחד מהסעיפים הבאים, ענה על השאלות הבאות בקשר למציאת בסיסים.

א. נתונים האיברים הבאים ב-$M_{2,2}$:

$$F = R, V = M_{2,2}(R), A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מצא בסיסים ל: $Sp\{A,B\}, Sp\{C,D\}, Sp\{A,B\} \cap Sp\{C,D\}, Sp\{A,B\} + Sp\{C,D\}$.

ב. נביט על $F = R, V = C^2, W = \{\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}, w = \bar{z}\}$. כאשר הגג מסמן צמוד מרכב. מצא ל-W בסיס.

שאלה 3 (17 נקודות)

א- נתונים מרחב וקטורי V מעל R ושני תתי מרחב U,W של V. הוכח כי $U+W=U$ אם ורק אם $W \subseteq U$.

בהצלחה.

תשובות לשאלות

תשובה לשאלה 1

1-א   קבוצה זו אינה סגורה לחבור וקטורים, כפי שמראה הדוגמא הבאה: נניח כי a=0,b=1, ואז y=x היא בתת הקבוצה, וגם y=1-x היא בתת הקבוצה, אבל x+1-x=1 אינה ב-W.

1-ב זהו תת מרחב, שכן מטריצת ה-0 מקימת את התנאי ש-0^T=-0, ולכן זו קהוצה לא ריקה. נניח כי A,B מקימות את התנאי, אז $A=-A^T, B=-B^T$ ואז $A+B=-A^T-B^T=-(A^T+B^T)=-(A+B)^T$. ברור כי כפל בסקלר שומר על התנאי.

1-ג זהו תת מרחב. נביט בתנאי. נובע כי x=(y+z)=0 ולכן וקטור שמקים את התנאי הוא מהצורה (0,y,-y) .
הקבוצה לא ריקה כי היא כוללת את וקטור ה-0 וברור כי היא סגורה לחבור וכפל בסקלר.

תשובה לשאלה 2

2-א-1,2,3 המטריצה אותה יש לדרג היא $\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 1 & y \\ 3 & 1 & z \\ 4 & 1 & w \end{pmatrix}$. נקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & 1 & y \\ 3 & 1 & z \\ 4 & 1 & w \end{pmatrix} \xrightarrow[S_4-4S_1\to S_4]{S_2-2S_1\to S_2,S_3-3S_1\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & y-2x \\ 0 & -2 & z-3x \\ 0 & -3 & w-4x \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[S_4-3S_2\to S_4]{S_3-2S_2\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & y-2x \\ 0 & 0 & (z-3x)-2(y-2x) \\ 0 & 0 & (w-4x)-3(y-2x) \end{pmatrix}.$$

לכן $Sp\{A,B\}$ מתאפין על ידי המשואות $x+z-2y=0,2x+w-3y=0$: בצורה דומה נקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ -4 & 2 & y \\ 1 & 0 & z \\ -4 & 0 & w \end{pmatrix} \xrightarrow[S_4+4S_1\to S_4]{S_2+4S_1\to S_2,S_3-S_1\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & 10 & y+4x \\ 0 & -2 & z-x \\ 0 & 8 & w+4x \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[S_4+4S_3\to S_4]{S_2+5S_3\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & -2 & z-x \\ 0 & 0 & (y+4x)+5(z-x) \\ 0 & 0 & (w+4x)+4(z-x) \end{pmatrix}$$

לכן $Sp\{C,D\}$ מתאפין על ידי המשואות $y+5z-x=0,w+4z=0$: כך נקבל את המשואות המאפינות את $Sp\{A,B\}\cap Sp\{C,D\}$ ואת פתרונן:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_4+S_1\to S_4]{S_2-2S_1\to S_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_4+S_2\to S_4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_2-S_3\to S_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_1+2S_3\to S_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -11 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן בסיס ל-$Sp\{A,B\}\cap Sp\{C,D\}$ הוא הוקטור $(11,6,1,-4)$ ואכן הוא מקים את כל ארבע המשואות.
בסיס ל $Sp\{A,B\}$ הוא למשל $\{(11,6,1,-4),(1,1,1,1)\}$ ובסיס ל $Sp\{C,D\}$ הוא למשל $\{(11,6,1,-4),(1,1,0,0)\}$. בסיס ל $Sp\{A,B\}+Sp\{C,D\}$ הוא האחוד :
$.\{(11,6,1,-4),(1,1,1,1),),(1,1,0,0)\}$

2-ב נסמן $(z,w)=(x+iy,a+ib)=(x,y,a,b)$. לפי הנתון $x=a,y=-b$ ולכן הוקטורים ב-W הם מהצורה $(x,yx,-y)$, ולכן בסיס ל-W הוא מהצורה $\{(1,0,1,0),(0,1,0,-1)\}$.

תשובה לשאלה 3

3-א. נתון כי $U+W=U$. נביט בוקטור $w\in W$ כלשהו. נבחר את $0\in U$. אז $0+w=w$ הוא ב-U. לכן $W\subseteq U$.
נתון $W\subseteq U$. נוכיח כי $U+W\subseteq U$. אז כל וקטור ב-U+W הוא מהצורה $u+w$, ומכיון שW מוכל ב-U, הוא מהצורה $u+u_2$, וכיון ש-U סגור לחבור, זהו וקטור ב-U.
נוכיח כי $U\subseteq U+W$, וזה קים ללא תנאי, כי אם נבחר את $0\in W$ וכל $u\in U$, אז $u=u+0$ הוא ב-U+W.