המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

המחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב. אלגברה ליניארית ב, 06.04.2016
סמסטר א', מועד ב'. תשע"ו.
מרצים : פרופ' מיכאל מוזיצ'וק, דר' גיורא דולה מתרגל רענן שכטר
משך המבחן: 3 שעות

אפשר להשתמש רק במחשבון כיס. יש לכתוב את כל התשובות במחברת.

חלק א'. בחלק זה יש לכתוב תשובות מלאות על שתי שאלות משאלות 1-3 ועל שאלה אחת משאלות 4-5. ניתן להשתמש באופן חופשי בכל טענה שהוכחה בהרצאה כל עוד היא מצוטטת במדויק.

1. 15 נקודות.

תהי J מטריצה מסדר n שכל הרכיבים שלה שווים ל-1. נגדיר

$$U=\{X\in M_n(\mathbf{R})\,|\,JX=nX\},$$
$$W=\{X\in M_n(\mathbf{R})\,|\,JX=O\}$$

א. הוכח ש U,W הם תת-מרחבים של $M_n(\mathbf{R})$.

ב. הוכח ש $M_n(\mathbf{R})$ הוא הסכום של U ו W.

2. 15 נקודות.

תהי S קבוצה סופית כלשהי. הוכח שלכל קבוצה סופית T המוכלת ב $Sp(S)$ מתקיים: $|T|>|S| \Leftarrow T$ ת"ל.

3. 15 נקודות.

הוכח שמרחב וקטורי V המוגדר מעל שדה F איזומורפי ל-F^n אם ורק אם $n=\dim(V)$.

4. 20 נקודות.

יהי $L:V\to V$ אופרטור ליניארי כלשהו. הוכח שאם $U\le V$ מקיים $U\cap Ker(L)=\{\bar{0}\}$ אז

א. וקטורים $\bar{u}_1,...,\bar{u}_m\in U$ תלויים ליניארית אם ורק אם הוקטורים $L(\bar{u}_1),...,L(\bar{u}_m)$ תלויים ליניארית.

ב. $\dim(U)=\dim(L(U))$.

5. 20 נקודות.

יהי V מרחב וקטורי נפרש סופית ו $W\le V$ תת-מרחב כלשהו. הוכח ש לכל בסיס B של W קיים בסיס A של V כך ש-$B\subseteq A$.

חלק ב. בחלק הזה יש לענות על 5 שאלות בלבד. משקל של כל שאלה: 10 נקודות

6. מצא בסיסים של הסכום והחיתוך של שני תת-מרחבים $U \le \mathbf{R}^4$ ו $V \le \mathbf{R}^4$ כאשר $U = \mathrm{Sp}(\,(1,4,3,2),(1,-1,1,-1)\,), V = \mathrm{Sp}(\,(1,0,1,0),(0,0,2,3),(2,0,0,-3))$. השלם את בסיס של $U \cap V$ לבסיס של $\mathbf{R}^4$.

7. נתונה מטריצה ממשית

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & b & 2 \\ 3 & 5 & -4 & 1 & c \end{pmatrix}$$

כאשר a,b,c הם פרמטרים ממשיים.

א. מצא את כל הערכים של a,b,c שעבורם הדרגה של A תהיה מינימלית.

ב. לכל הערכים של הפרמטרים שמצאת בחלק א' מצא בסיסים של $C(A)$.

8. יהיו $A = (\bar{a}_1 = (1,1,x), \bar{a}_2 = (1,-1,y))$ ו $B = (\bar{b}_1 = (3,-1,2), \bar{b}_2 = (8,-2,6))$ שני בסיסים של תת-מרחב דו-מימדי V ($V \le \mathbf{R}^3$).

א. מצא את x, y ואת מטריצת-המעבר ${}_A T_B$.

ב. האם קיים וקטור $\bar{v} \in \mathbf{R}^3$ השונה מאפס כך ש-$[\bar{v}]_A = [2\bar{v}]_B$? נמק.

9. נתון אופרטור ליניארי $L : M_2(\mathbf{R}) \to M_2(\mathbf{R})$ המוגדר ע"י $L(X) = XA + AX - X$ כאשר $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

א. מצא את המטריצה של L בבסיס:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ב. מצא בסיסים של $\mathrm{Ker}(L), \mathrm{Im}(L)$.

10. מצא את ההעתקה הלינארית L מ $\mathbf{R}_2[x]$ ל- $\mathbf{R}^2$ שמטריצת ${}_A[L]_B$ בבסיסים $A = (\bar{a}_1 = (1,2), \bar{a}_2 = (2,3))$; $B = (\bar{b}_1 = x^2, \bar{b}_2 = x^2 - x, \bar{b}_3 = x^2 - x + 1)$ שווה ל-$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

11. נתונה מטריצה ממשית $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 6 & 7 & 8 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$.

א. חשב את הפולינום האופייני ואת הערכים העצמיים של A.

ב. מצא את הבסיסים של המרחבים העצמיים של A.

ג. מצא את המטריצה המלכסנת T של A וחשב את A^{2016}.

בהצלחה!

תשובות

תשובה 1

א.נניח כי $X,Y\in U,\alpha,\beta\in F$ אז מתקיים כי $JX=nX,JY=nY$ ולכן לפי חוקי מטריצות ובעיקר פלוג נקבל
$J(\alpha X+\beta Y)=J(\alpha X)+J(\beta Y)=\alpha JX+\beta JY=\alpha nX+\beta nY=n(\alpha X+\beta Y)$. בצורה דומה עבור V $J(\alpha X+\beta Y)=J(\alpha X)+J(\beta Y)=\alpha JX+\beta JY=\alpha 0+\beta 0=0(\alpha X+\beta Y)$
ב. צריך להוכיח כי בהנתן מטריצה $X\in M_n(\mathbf{R})$ ניתן להציג אותה כסכום של מטריצות האחת מ U והאחרת מ W. נכתוב $X=X-\frac{JX}{n}+\frac{JX}{n}$ ונשים לב כי מתקיים $J(\frac{JX}{n})=JJ\frac{X}{n}=nJ\frac{X}{n}=JX=n(\frac{JX}{n})$ וכן מתקיים
$J(X-\frac{JX}{n})=JX-J\frac{JX}{n}=JX-JX=0$ כדרוש.

תשובה 4

א. נניח כי $\bar{u}_1,...,\bar{u}_m\in U$ תלויים לינארית. אז קימים מקדמים $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ שלא כלם אפס כך ש $\alpha_1\bar{u}_1+...+\alpha_n\bar{u}_n=\bar{0}$. אז בהיות L העתקה לינארית מתקיים $\alpha_1L(\bar{u}_1)+...+\alpha_nL(\bar{u}_n)=L(\alpha_1\bar{u}_1+...+\alpha_n\bar{u}_n)=L(\bar{0})=\bar{0}$ עם מקדמים שלא כולם 0, ולכן היות $\bar{u}_1,...,\bar{u}_m\in U$ תלויים לינארית גוררת היות $L(\bar{u}_1),...,L(\bar{u}_m)$ תלויים לינארית ולכן על ידי חוקי הלוגיקה היות $L(\bar{u}_1),...,L(\bar{u}_m)$ בת״ל גורר את היות $\bar{u}_1,...,\bar{u}_m\in U$ בת״ל. נניח כי קימים מקדמים $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ שלא כלם אפס כך ש $\alpha_1L(\bar{u}_1)+...+\alpha_nL(\bar{u}_n)=\bar{0}$. אז בהיות L העתקה לינארית מתקיים $L(\alpha_1\bar{u}_1+...+\alpha_n\bar{u}_n)=\alpha_1L(\bar{u}_1)+...+\alpha_nL(\bar{u}_n)=\bar{0}$ ולכן
$\alpha_1\bar{u}_1+...+\alpha_n\bar{u}_n\in Ker(L)=\{\bar{0}\}\to\alpha_1\bar{u}_1+...+\alpha_n\bar{u}_n=\bar{0}$ ולא כל המקדמים הם 0, ולכן היות $L(\bar{u}_1),...,L(\bar{u}_m)$ תלויים לינארית גוררת היות $\bar{u}_1,...,\bar{u}_m\in U$ תלויים לינארית, ולכן $L(\bar{u}_1),...,L(\bar{u}_m)$ תלויים לינארית אם ורק אם $\bar{u}_1,...,\bar{u}_m\in U$ תלויים לינארית, ולכן $L(\bar{u}_1),...,L(\bar{u}_m)$ בלתי תלויים לינארית אם ורק אם $\bar{u}_1,...,\bar{u}_m\in U$ בלתי תלויים לינארית

ב. נקח בסיס $\bar{b}_1,...,\bar{b}_m\in U$ אז $L(\bar{b}_1),...,L(\bar{b}_m)$ פורש את L(U)., הקבוצה $\bar{b}_1,...,\bar{b}_m\in U$ היא בת״ל ולכן סעיף א גם הקבוצה $L(\bar{b}_1),...,L(\bar{b}_m)$ היא בת״ל לכן היא בסיס של L(U) . ולכן dim(L(U))=m=dim(U).
ג.
תשובה 6

נעביר את U ואת V לצורה של משוואות:

$$\begin{pmatrix}1&1&a\\-1&4&b\\1&3&c\\-1&2&d\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&a\\0&5&a+b\\0&2&c-a\\0&3&a+d\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&a\\0&5&a+b\\0&2&c-a\\0&1&2a+d-c\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&a\\0&0&-9a+b-5d+5c\\0&0&3c-5a-2d\\0&1&2a+d-c\end{pmatrix}$$

כלומר U הוא תת המרחב המקיים את המשוואות $3c-5a-2d=0,-9a+b-5d+5c=0$ ובצורה דומה

$$\begin{pmatrix}1&2&0&a\\0&0&0&b\\1&0&2&c\\0&-3&3&d\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&a\\0&0&0&b\\0&-2&2&c-a\\0&-3&3&d\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&a\\0&0&0&b\\0&-2&2&c-a\\0&0&0&2d+3a-3c\end{pmatrix}$$ כלומר V הוא תת

המרחב המקיים את המשוואות b=0,3a-3c+2d=0 ולכן החיתוך מקיים את המשוואות $3c-3a-2d=0,-9a+b-5d+5c=0,$ b=0,5a-3c+2d=0 אותן נפתר ונקבל

כלומר $$\begin{pmatrix}-3&0&3&-2\\-9&1&5&-5\\0&1&0&0\\5&0&-3&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&0&0\\-9&1&5&-5\\0&1&0&0\\5&0&-3&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&5&-5\\0&1&0&0\\0&0&-3&2\end{pmatrix}\to I_4$$

$U\cap V=\{\bar{0}\}$, עבור U נקבל את הבסיס $(1,4,3,2),(1,-1,1,-1)$, עבור V את $(0,0,2,3),(1,0,1,0),(2,0,0,-3)$ ואחודם כל 2 מהבסיס של V עם הבסיס של U הוא בסיס של U+V.

תשובה 7

$$\begin{pmatrix}1&-1&a&0&1\\2&2&-1&b&2\\3&5&-4&1&c\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&a&0&1\\0&4&-1-2a&b&0\\0&8&-4-3a&1&c-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&a&0&1\\0&4&-1-2a&b&0\\0&0&-2+a&1-2b&c-3\end{pmatrix}$$ ולכן הדרגה

המינימלית היא כאשר a=2,b=0.5,c=3. עבור הערכים הללו בסיס של C(A) הוא {(1,2,3),(-1,2.5)}.

תשובה 8

א.

$$\begin{pmatrix}1&1&3&8\\1&-1&-1&-2\\x&y&2&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&3&8\\0&-2&-4&-10\\0&y-x&2-3x&6-8x\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&3&8\\0&1&2&5\\0&y-x&2-3x&6-8x\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&1&3&8\\0&1&2&5\\0&0&2-3x-2y+2x&6-8x-5y+5x\end{pmatrix}\to 2-x-2y=0,6-3x-5y=0\to x=2,y=0$$

$$\begin{pmatrix}1&1&3&8\\0&1&2&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&3\\0&1&2&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to T=\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}$$

ב.

מהשוויונים $[\bar{v}]_A=T[\bar{v}]_B$ $[\bar{v}]_A=2[\bar{v}]_B$ נובע $2[\bar{v}]_B=T[\bar{v}]_B$. לכן משמעות הדרישה היא ש-2 הוא ערך עצמי של T, ונבדוק זאת לפי הפולינום האפייני ונקבל

$p=\det\begin{pmatrix}1-x&3\\2&5-x\end{pmatrix}=5-6x+x^2-6=x^2-6x-1.$ 2 איננו פתרון של הפולינום ולכן אין כזה וקטור שהוא שונה מאפס.

תשובה 9

$$L(B_1)=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}=$$
$$=2B_1-2B_2+B_4$$

$$L(B_2)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=$$
$$=B_1-2B_2+B_4-B_3$$

$$L(B_3)=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=$$
$$=B_1-2B_2+B_4-B_3$$

$$L(B_4)=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\2&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\2&-2\end{pmatrix}=$$
$$=B_1+2B_4-4B_3$$

ולכן

$$[L]_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$Ker(L) = sp\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathrm{Im}(L) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = sp(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix})$$

וכל ה מקדמים הללו הם

בבסיס הנתון $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$

תשובה 10

$$L(\overline{b_1}) = 1\overline{a_1} \to L(x^2) = (1,2)$$
$$L(\overline{b_2}) = 1\overline{a_1} - 1\overline{a_2} \to L(x^2 - x) = (1,2) - (2,3) = (-1,-1)$$
$$L(\overline{b_3}) = -1\overline{a_1} + 1a_2 \to L(x^2 - x + 1) = -(1,2) + (2,3) = (1,1) \to$$
$$L(1) = L(x^2 - x + 1) - L(x^2 - x) = (1,1) - (-1,-1) = (2,2)$$
$$L(x) = L(x^2) - L(x^2 - x) = (1,2) - (-1,-1) = (2,3)$$
$$L(x^2) = (1,2)$$
$$L(p + qx + rx^2) = p(2,2) + q(2,3) + r(1,2) = (2p + 2q + r, 2p + 3q + 2r)$$

תשובה 11.

א.

$$\begin{pmatrix} -2-x & -3 & -4 \\ 6 & 7-x & 8 \\ -3 & -3 & -3-x \end{pmatrix} \xrightarrow{S1+S2+S3\to S3} \begin{pmatrix} -2-x & -3 & -4 \\ 6 & 7-x & 8 \\ 1-x & 1-x & 1-x \end{pmatrix} \to (1-x)\begin{pmatrix} -2-x & -3 & -4 \\ 6 & 7-x & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C2-C1\to C2} (1-x)\begin{pmatrix} -2-x & x-1 & -4 \\ 6 & 1-x & 8 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to (1-x)^2\begin{pmatrix} -2-x & -1 & -4 \\ 6 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C1-C3\to C1}$$

$$(1-x)^2\begin{pmatrix} 2-x & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1-x)^2(-x)$$

$$\begin{pmatrix} -2-x & -3 & -4 \\ 6 & 7-x & 8 \\ -3 & -3 & -3-x \end{pmatrix}, V1 = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -4 \\ 6 & 6 & 8 \\ -3 & -3 & -4 \end{pmatrix}, 3x+3y+4z=0, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$V0 = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 6 & 7 & 8 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בדיקה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 6 & 7 & 8 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ד. נסמן את המטריצה האלכסונית המתאימה באות Λ, אז מתקיים כי $\Lambda^{2016} = \Lambda$
ולכן $A^{2016} = A$