<u>מבחן סופי באלגברה לינארית א למדעי המחשב-מועד א.</u>
<u>יום ו, יב שבט התשס"ו 10-2-2006</u>

- מורה: גיורא דולה, מתרגל: רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שעתים וחצי.
- מותרים מחשבונים
- יש לכתוב את התשובות לשאלות בטופס המבחן. יש לכתוב תשובות סופיות בלבד. מחברות המבחן לא תבדקנה והן משמשות כטיוטה.
- הציון המקסימלי במבחן הוא 100 .
- במבחן 15 שאלות ב-5 חלקים.
- בחלק הראשון 9 שאלות במשקל של 7 נקודות כל אחד. ענה על 8 שאלות בלבד. אם תענינה יותר מ-8 שאלות תבחרנה 8 השאלות הראשונות. סה"כ 56 נקודות בחלק הראשון.
- בחלק השני שאלה אחת בת משקל של 12 נקודות (עם חמש תשובות חלקיות) .
- בחלק השלישי 3 שאלות במשקל של 4 נקודות כל אחת. בכל תשובה כזו יש לסמן במעגל את האופציה הנכונה. סה"כ 12 נקודות בחלק השלישי.
- בחלק הרביעי שאלת נסוח אחת בת משקל של 10 נקודות.
- בחלק החמישי שאלת הוכחה אחת בת משקל של 10 נקודות.

56+12+12+10+10=100

<u>נקוד חלקי</u>

- לחלק מהשאלות בחלק א, ולשאלה היחידה בחלק ב יש תשובות לנקוד חלקי.
- יתכן לצבור נקוד חלקי או בשיטת גאוס או בשיטה המבוססת על דטרמיננטים, אך לא בשתיהן.
- בכל תשובה או תשובה חלקית יש לכתוב תשובה סופית בלבד.

בהצלחה.

<u>חלק א- שאלות 1-9 מהן יש לבחור 8 שאלות. משקל כל שאלה 7 נקודות.</u>

<u>שאלה 1(7 נקודות)</u>

טור א

נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{Bmatrix} x & -2ay & -5z & = -9a \\ 2x & +3y & +2az & = 25 \\ 3x & -y & -z & = 7 \end{Bmatrix}$$

פתור את המערכת במחברתך ומצא במחברתך עבור אלו ערכים של a למערכת יש אינסוף פתרונות, אף פתרון או פתרון יחיד.

<u>תשובת ביניים</u>: (4 נקודות) ענה על <u>אחת (בלבד)</u> משתי השאלות הבאות:

<u>ביניים 1</u>. באם פתרת לפי שיטת גאוס: כתוב את המערכת בשלב שבו יש שני אפסים בעמודה הראשונה.

<u>ביניים 2</u>. באם פתרת על ידי דטרמיננט, כתוב את $M_{1,1}$ ו-$M_{1,2}$.

.

<u>תשובה מלאה(3 נקודות)</u>: ענה על כל השאלות הבאות: ענה תשובה סופית בלבד:
חלק מהערכים הנכונים של a הם <u>שברים</u>.

<u>מלאה 1</u>: מהו/מהם הערכים של a עבורו/עבורם יש למערכת אינסוף פתרונות?
a=

<u>מלאה 2</u>: מהו/מהם הערכים של a עבורו/עבורם אין למערכת פתרונות?
a=

<u>מלאה 3</u>: מהו/מהם הערכים של a עבורו/עבורם יש למערכת פתרון יחיד?
a=

פתרון דרך ראשונה- על ידי שיטת גאוס

נעבור למערכת משוואות מטריציאלית ונבצע פעולות אלמנטריות:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2a & -5 & -9a \\ 2 & 3 & 2a & 25 \\ 3 & -1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[s_3-3s_1\to s_3]{s_2-2s_1\to s_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2a & -5 & -9a \\ 0 & 4a+3 & 2a+10 & 25+18a \\ 0 & 6a-1 & 14 & 7+27a \end{pmatrix} \xrightarrow[(4a+3)s_3-(6a-1)s_2\to s_3]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2a & -5 & -9a \\ 0 & 4a+3 & 2a+10 & 25+18a \\ 0 & 0 & 2(2-a)(6a+13) & 23(2-a) \end{pmatrix}$$

נשים לב כי ישנם שלשה ערכים של a אשר יגרמו להתאפסות על האלכסון. יש לבדק את המערכת עבור כל אחד מהם:

עבור a=2 נקבל כי השורה השלישית כלה מתאפסת. לכן יש אז אינסוף פתרונות.

עבור a=-13/6 המקדם של z בשורה השלישית מתאפס, אך האבר החפשי באותה שורה לא מתאפס. לכן עבור ערך זה אין למערכת פתרון.

עבור a=-3/4 נכתוב שוב את השורות השניה והשלישית של המערכת <u>לפני</u> האחרונה. הן הופכות להיות שורות של מטריצה משולשית (אם כי בסדר הפוך) ולכן למערכת יש פתרון יחיד.

ולסכום: a=2 נותן אינסוף פתרונות, a=-13/6 נותן מערכת ללא פתרון. לכל a אחר יש פתרון יחיד.

דרך פתרון אחרת: נחשב את הדטרמיננט של מטריצת המקדמים, למשל על ידי פתוח לפי עמודה ראשונה ונקבל:

$$\det(A)=1\cdot(-3+2a)-2(2a-5)+3(15-4a^2)=$$
$$-12a^2-3+2a-4a+10+45=-12a^2-2a+52=$$
$$2(2-a)(6a+13).$$

ומכאן ממשיכים כרגיל.

טור ב

נתונה מערכת המשואות:

$$\left\{\begin{array}{cccc} x & +2ay & +4z & =3a+4 \\ 2x & +3y & +(3a+2)z & =10 \\ 3x & +5y & +9z & =17 \end{array}\right\}$$

פתרון דרך ראשונה- על ידי שיטת גאוס

נעבור למערכת משואות מטריציאלית ונבצע פעולות אלמנטריות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2a & 4 & 3a+4 \\ 2 & 3 & 3a+2 & 10 \\ 3 & 5 & 9 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow[s_3-3s_1\to s_3]{} \quad \xrightarrow[s_2-2s_1\to s_2]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2a & 4 & 3a+4 \\ 0 & 3-4a & 3a-6 & 2-6a \\ 0 & 5-6a & -3 & 5-9a \end{pmatrix} \xrightarrow[(3-4a)s_3-(5-6a)s_2\to s_3]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2a & -5 & -9a \\ 0 & 3-4a & 3a-6 & 2-6a \\ 0 & 0 & 3(a-1)(6a-7) & 5(a-1) \end{pmatrix}$$

נשים לב כי ישנם שלשה ערכים של a אשר יגרמו להתאפסות על האלכסון. יש לבדק את המערכת עבור כל אחד מהם:

עבור a=1 נקבל כי השורה השלישית כלה מתאפסת. לכן יש אז אינסוף ערכים.

עבור a=7/6 המקדם של z בשורה השלישית מתאפס, אך האבר החפשי באותה שורה לא מתאפס. לכן עבור ערך זה אין למערכת פתרון.

עבור a=3/4 נכתוב שוב את השורות השניה והשלישית של המערכת <u>לפני</u> האחרונה. הן הופכות להיות שורות של מטריצה משולשית (אם כי בסדר הפוך) ולכן למערכת יש פתרון יחיד.

ולסכום: a=1 נותן אינסוף פתרונות, a=7/6 נותן מערכת ללא פתרון.

דרך פתרון אחרת: נחשב את הדטרמיננט של מטריצת המקדמים, למשל על ידי פתוח לפי עמודה ראשונה ונקבל:

$$\det(A)=1\cdot(27-15a-10)-2(18a-20)+3(6a^2+4a-12)=$$
$$18a^2+17-15a-36a+40+12a-36=18a^2-39a+21=$$
$$3(a-1)(6a-7).$$

ומכאן ממשיכים כרגיל.

<u>שאלה 2 (7 נקודות)</u>

טור א

נתונה המטריצה הבאה שרכיביה שיכים לשדה Z_3.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\2&0&2\end{pmatrix}^T$$

חשב במחברתך את A^{-1} .

<u>תשובת בינים</u>:(4 נקודות) ענה על <u>אחת (בלבד)</u> משתי השאלות הבאות:

<u>בינים 1</u>. באם פתרת לפי שיטת גאוס עבור מטריצה 3x6, כתוב את המערכת בשלב שבו יש למטריצה 3x6 שני אפסים בעמודה הראשונה.

<u>בינים 2</u>. באם פתרת לפי שיטת ה-adj(A), כתוב את det(A).

תשובה מלאה(3 נקודות): ענה תשובה סופית בלבד: כתב את השורה הראשונה של A^{-1} :

טור ב

נתונה המטריצה הבאה שרכיביה שיכים לשדה Z_3.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T$$

חשב במחברתך את A^{-1} .

תשובת בינים:(4 נקודות) ענה על אחת (בלבד) משתי השאלות הבאות:

בינים 1. באם פתרת לפי שיטת גאוס עבור מטריצה 3x6, כתוב את המערכת בשלב שבו יש למטריצה 3x6 שני אפסים בעמודה הראשונה.

<u>בינים 2</u>. באם פתרת לפי שיטת ה-adj(A), כתוב את det(A).

<u>תשובה מלאה(3 נקודות)</u>: ענה תשובה סופית בלבד: כתב את השורה השניה של A^{-1}.:

פתרון : דרך ראשונה: לפי דטרמיננטים:

$$\begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} \\ - & - & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -(-4) & -2 \\ -(4) & 0 & -(-4) \\ - & - & - \end{pmatrix}$$

נזכר כי אנו ב- Z_3 ולכן נשנה:

$$adjA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ - & - & - \end{pmatrix}$$

כעת נחלק ב $\det(A)=2+2\cdot3=8$. בשדה שלנו $8=2$ וחלוקה ב-2 היא כמו כפל ב-2. לכן נקבל כי:

$$A^{-1}=2\begin{pmatrix}2&1&1\\2&0&1\\-&-&-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2&2\\4&0&2\\-&-&-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&0&2\\-&-&-\end{pmatrix}$$

דרך שניה: על ידי הצמדת מטריצת יחידה:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\1&2&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[s_3-s_1\to s_3]{s_2-2s_1\to s_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-4&-2&1&0\\0&2&0&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{s_3-2s_2\to s_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-4&-2&1&0\\0&0&8&3&-2&1\end{array}\right)$$

נציב ערכים ב- Z_3 ונקבל:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[s_2 - s_3 \to s_2]{s_1 - s_3 \to s_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

וקבלנו אותה תשובה:

<u>שאלה 3(7 נקודות)</u>

טור א:

מצא במחברתך את כל המטריצות A אשר מקימות את המשואה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>תשובת בינים</u>: (4 נקודות) כתוב כאן את מערכת המשואות:

תשובה מלאה(3 נקודות): כתוב כאן את כל המטריצות A המבוקשות.

טור ב:

מצא במחברתך את כל המטריצות A אשר מקיימות את המשוואה:

$$A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} A$$

תשובת בינים: (4 נקודות) כתוב כאן את מערכת המשוואות:

<u>תשובה מלאה</u>(3 נקודות): כתוב כאן את כל המטריצות A המבוקשות.

פתרון טור א: נסמן את המטריצה על ידי איבריה:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

ונקבל את המכפלות:

$$\begin{pmatrix} a+2c+3e & b+2d+3f \\ 3c+3e & 3d+3f \\ 6e & 6f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a & 3a+3b \\ 6c & 3c+3d \\ 6e & 3e+3f \end{pmatrix}$$

נפתר את המשוואות מלמטה למעלה. נקבל:

$$6e = 6e, 6f = 3e+3f, 6c = 3c+3e, 3d+3f = 3c+3d$$

נפתר בינתים משוואות אלו:נקבל e=f=c. נמשיך לשתי המשוואות העליונות:

$$a+2c+3e=6a,b+2d+3f=3a+3b$$

נציב את הפתרונות מקודם ונקבל גם: a=c,b=d . לכן כל המטריצות הללו נראות בצורה:

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \\ a & a \end{pmatrix}$$

, ואכן קל לבדוק שהללו מקימות את הדרוש.

טור ב-זו אותה משואה כמו בטור א אבל מוחלפת, ולכן מטריצת הפתרון יוצאת המוחלפת של הפתרון של טור א.

<u>שאלה 4(7 נקודות)</u>

נתונה מטריצה A מסדר 6x6 אשר מוגדרת על ידי הנוסחה: $A_{i,j}=\max\{i+j-1,5\}$ עבור $1\le i,j\le 6$. חשב במחברתך את det(A).

<u>תשובת בינים</u> (4 נקודות): כתוב כאן את המטריצה:

<u>תשובה מלאה:</u> (3 נקודות)
det(A)=

תשובה:נכתב את אברי המטריצה:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 5 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

נפעיל את הפעולות $S_i\text{-}S_{i\text{-}1}\rightarrow S_i$ ונקבל את המטריצה:

$$B=\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

כעת נבצע את הפעולה $S_1\text{-}5S_6\rightarrow S_1$ ונציב במטריצה ונקבל:

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

נפתח לפי שורה אחרונה כל פעם ונקבל $\det(A)=(-1)1(-1)1(-1)1=-1$.

<u>שאלה 5 (7 נקודות)</u>

נתונה המטריצה A :

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix}$$

ונתונה המטריצה B:

$$B = \begin{pmatrix} a_{1,4} & a_{2,4} & a_{3,4} & a_{4,4} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} & a_{4,3} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} & a_{4,2} \\ a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} & a_{4,1} \end{pmatrix}$$

וידוע כי det(A)=999 מצא את det(B).

תשובה מלאה: det(B)=

תשובה: נביט על המוחלפת של B:

$$B^T = \begin{pmatrix} a_{1,4} & a_{1,3} & a_{1,2} & a_{1,1} \\ a_{2,4} & a_{2,3} & a_{2,2} & a_{2,1} \\ a_{3,4} & a_{3,3} & a_{3,2} & a_{3,1} \\ a_{4,4} & a_{4,3} & a_{4,2} & a_{4,1} \end{pmatrix}$$

במטריצה B^T נחליף בין עמודות 1 ו-4, ובין עמודות 2 ו-3, ונקבל את A.
לכן $\det(B)=\det(B^T)=-(-(\det(A)))=\det(A)$.

שאלה 6(7 נקודות)

חשב במחברתך את השארית בחלוקה ל-5 של הבטוי: $(2^{1001}-1)(3^{1001}-1)$.

<u>תשובה מלאה</u>: השארית שוה ל-

תשובה: נביט על השדה Z_5. בשדה זה, $2^4=16=1, 3^4=81=1$ ולכן:
$(2^{1001}-1)(3^{1001}-1)=((2^4)^{250}2-1)((3^4)^{250}3-1)=(2-1)(3-1)=2$.

שאלה 7(7 נקודות)

נתונה המערכת $Av=b$ כך שהמטריצה

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{pmatrix}$$

היא מדורגת קנונית (סימנו לאפס כלפי מטה, מעלה, ויש אחד על האלכסון) ,
ונתון כי $a_{1,1}=a_{3,4}=1$, כי $b=(1,2,3)^T$ וכי $v=(1,2,2,3)^T$ הוא אחד
הפתרונות. רשום במחברתך את הפתרון הכללי עבור v. :

תשובה: v הכללי הוא

תשובה המטריצות האפשריות בגלל התנאי שהמטריצות הן מדורגות קנונית הן:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{1,3} & 0 \\ 0 & 1 & a_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אם נכפל את המטריצה הראשונה בפתרון (1,2,2,3) נקבל כי $a_{1,3}=a_{2,3}=0$.
אם נכפל את המטריצה השניה בפתרון נקבל כי
$a_{1,2}=0$. לכן הפתרון מהמערכת הראשונה הוא כל הוקטורים (1,2,z,3) ולכן פתרון המערכת השניה הוא (1,y,2,3) . ואחוד כל המקרים הללו הוא הפתרון המלא.

<u>שאלה 8(7 נקודות)</u>

נתונה מערכת משוואות לינארית (מעל Z_5) $Av=b$ כאשר A מטריצה מסדר $(n-1)xn$, וכאשר v,b הם וקטורים , $v=(x_1, x_2,\ldots, x_n)^T$. A היא בצורת מדרגות קנונית (סימנו לאפס כלפי מטה, מעלה, ויש אחד על האלכסון). אז מספר פתרונות המערכת הוא:.

תשובה: חמישה פתרונות

שאלה 9 (7 נקודות)

טור א

חשב את $(1+i)^{100}/(1+\sqrt{3}i)^{50}$ בהצגה קרטזית.

תשובה

$(1+i)=\sqrt{2}cis(45)$, $(1+\sqrt{3}i)=2cis(60)$,

$(1+i)^{100}=2^{50}cis(12(8\cdot 45)+180)=-2^{50}$,

$(1+\sqrt{3}i)^{50}=2^{50}cis(8(6\cdot 60)+120)=2^{50}cis(120)$

ולכן

$(1+i)^{100}/(1+\sqrt{3}i)^{50}=2^{50}cis(180)/\ 2^{50}cis(120)=cis(60)$

ולכן התשובה היא $(1+\sqrt{3}i)/2$

טור ב

חשב את $(1+\sqrt{3}i)^{50}/(1+i)^{100}$ בהצגה קרטזית.

התשובה היא $2^{50}cis(120)/\ 2^{50}cis(180)=cis(-60)=(1-\sqrt{3}i)/2$

חלק ב

בחלק זה שאלה אחת . לשאלה יש חמש תשובות בינים של נקודה אחת כל אחת, ושני סעיפי תשובה מלאה של 6 נקודות כל אחת, סה"כ 12 נקודות.

שאלה 10(12 נקודות)

נתונה מטריצה רבועית A_n מסדר nxn אשר מוגדרת על ידי :

$A_{i,j}=3$, $i-j=0$, $A_{i,j}=2$, $i-j=1$, $A_{i,j}=1$, $i-j=-1$, $A_{i,j}=0$, $|i-j|>1$

תשובות בינים: ענה על כל סעיפי הבינים:

בינים א (נקודה אחת). כתוב כאן את המטריצה A_4

$$A_4=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

בינים ב(נקודה אחת). כתוב את $\det(A_1)$. $\det(A_1)=3$

בינים ג(נקודה אחת). כתוב את $\det(A_2)$. $\det(A_2)=7$

$\det(A_3)=15$ <u>בינים ד(נקודה אחת).</u> כתוב את $\det(A_3)$.

$\det(A_4)=31$ <u>בינים ה(נקודה אחת).</u> כתוב את $\det(A_4)$.

<u>מלאה א.(3 נקודות)</u> כתוב את $\det(A_n)$. כפונקציה של n

$\det(A_n)=2^{n+1}-1$

נביט במערכת $A_nv=b$ כאשר A_n הוגדרה בתחילת השאלה
$b=(1,0,\ldots,0)^T$ ו- $v=(x_1, x_2,\ldots, x_n)^T$.

<u>מלאה ב. (4 נקודות)</u> כתוב את x_1 כפונקציה של n .
$x_1=(2^n-1)/(2^{n+1}-1)$

<u>חלק ג</u>

בחלק זה שלש שאלות בנות 4 נקודות כל אחת. עליך להקיף את התשובה הנכונה בכל שאלה.

<u>שאלה 11(4 נקודות)</u>

נתונה מערכת משוואות לינארית (מעל R) $Av=b$ כאשר A מטריצה מסדר nxn, וכאשר v,b הם וקטורים , $v=(x_1, x_2,\ldots, x_n)^T$. נתון כי למערכת יש שתי משוואות זהות. אז למערכת יש אינסוף פתרונות.

תשובה כן לא

תשובה: לא כיון שלא בטוח כי למערכת יש פתרון.

<u>שאלה 12(4 נקודות)</u>

נתונות שתי מטריצות A,B מסדר 2x2 אשר מקימות כי $A^2=B^2$. מכאן נובע כי A=+B או A=-B.

תשובה כן לא

לא, כי אם A היא המטריצה

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ו B מטריצת האפס, אז A-B=A ו-$A^2=0=B^2$ אבל לא מתקיים A=+B או A=-B.

<u>שאלה 13 (4 נקודות)</u>

נתונים שני מספרים מרוכבים z,w ואשר הצמודים שלהם מסומנים $\bar{z}, \bar{w}$. נתון כי $\overline{z^3} = w^3$. האם נובע כי $\bar{z} = w$?

תשובה כן לא

לא, כי יתכנו שני מספרים מרוכבים שונים בעלי אותה חזקה שלישית, למשל 1 ו-cis(120).

<u>חלק ד-</u> שאלת נסוח.

<u>שאלה 14(10 נקודות)</u>

נסח משפט אשר כולל 4 טענות שקולות ואשר אחת מהטענות השקולות היא ש A מטריצה הפיכה.

<u>חלק ה-</u> שאלת הוכחה

<u>שאלה 15(10 נקודות)</u>

הוכח כי אם A מטריצה הפיכה אז $\det(A)\neq 0$. מותר להסתמך על טענות עזר, אבל יש לנסח אותן במדויק.