יום ב, טז סיון התשסו- 12-6-2006

מטריצות העתקה:

דוגמא ראשונה – צמידות מטריצות

יהיו $F=R, V=W=R^3$ ונגדיר $L:V\rightarrow W$ על ידי :
$L((x,y,z))=(2x+3y+4z,5x+6y+7z,8x+9y+10z))$ וברור כי זו העתקה לינארית.

נביט בבסיס הסטנדרטי $E=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ ונבטא את המטריצה של L בבסיס זה.
$L((1,0,0))=(2,5,8)=2e_1+5e_2+8e_3$
$L((0,1,0))=(3,6,9)=3e_1+6e_2+9e_3$
$L((0,0,1))=(4,7,10)=4e_1+7e_2+10e_3$

ולכן מטריצת ההעתקה היא

$$A={}_E[L]_E=\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&7\\8&9&10\end{pmatrix}$$

כעת נפעל על השורות של A ונעשה לה תהליך גאוס ונקבל:

$$\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&7\\8&9&10\end{pmatrix}\xrightarrow{S_2-2S_1\rightarrow S_1}\begin{pmatrix}1&0&-1\\5&6&7\\8&9&10\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-8S_1\rightarrow S_3]{S_2-5S_1\rightarrow S_2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&6&12\\0&9&18\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3/9\rightarrow S_3]{S_2/6\rightarrow S_2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}$$

ולכן שתי העמודות הראשונות של A הן בסיס של IM(L), ואותו נוכל להשלים לבסיס של R^3.

$C=\{(2,5,8),(3,6,9),(1,0,0)\}$.

נבחר את (1,0,0) בתור אבר בתמונה ההפוכה על ידי L של (2,5,8).
נבחר את (0,1,0) בתור אבר בתמונה ההפוכה על ידי L של (3,6,9).
נביט על בסיס של Ker(L) וזהו הוקטור (1,-2,1).
לפי המשפט $dim(Im(L))+dim(Ker(L))=dim(V)$ נובע כי $B=\{(1,0,0),(0,1,0),(1,-2,1)\}$ גם הוא בסיס של R^3.

נחשב את המטריצה של L בבסיסים C,B.
$L(1,0,0)=(2,5,8)=1b_1+0b_2+0b_3$.
$L(0,1,0)=(3,6,9)=0b_1+1b_2+0b_3$.
$L(1,-2,1)=(0,0,0)=0b_1+0b_2+0b_3$.
ולכן נקבל את מטריצת ההעתקה:

$${}_C[L]_B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

כעת ננסה לבדק את הטענה הבאה בהקשר לדוגמא הקודמת.

$${}_{C'}[L]_{B'} = {}_{C'}[T]_C\, {}_C[L]_B\, {}_B[T]_{B'}$$

נעבר למקרה פרטי:

$${}_C[L]_B = {}_C[T]_E\, {}_E[L]_E\, {}_E[T]_B$$

כאשר E,B,C הם הבסיסים שחושבו קודם. אז

$$A = {}_E[L]_E = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$${}_C[L]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$${}_E[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}_E[T]_C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 0 \\ 8 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

ואז המטריצה ההפוכה של המטריצה האחרונה היא המטריצה הנחוצה עבור השויון וקל לראות כי זו המטריצה

$${}_C[T]_E = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 0 & 8/3 & -5/3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

אז אכן נקבל

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 0 & 8/3 & -5/3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 0 & 8/3 & -5/3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ 8 & 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

דוגמא שניה – דמיון מטריצות

יהיו $F=R, V=W=R^3$ ונגדיר $L:V\to W$ על ידי : $L((x,y,z))=(2x+3y+5z,x+4y+5z,-x-3y-4z))$
וברור כי זו העתקה לינארית.

נביט בבסיס הסטנדרטי $E=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ ונבטא את המטריצה של L בבסיס זה.
$L((1,0,0))=(2,1,-1)=2e_1+e_2-e_3$
$L((0,1,0))=(3,4,-3)=3e_1+4e_2-3e_3$
$L((0,0,1))=(5,5,-4)=5e_1+5e_2-4e_3$

ולכן מטריצת ההעתקה היא

$$A={}_E[L]_E=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

נחשב את הפולינום האפיני של A ונקבל :

$$p_A(x)=\det(xI-\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix})=\det(\begin{pmatrix} x-2 & -3 & -5 \\ -1 & x-4 & -5 \\ 1 & 3 & x+4 \end{pmatrix})$$

נבצע פעולות אלמנטריות על המטריצה האחרונה:

$$\begin{pmatrix} x-2 & -3 & -5 \\ -1 & x-4 & -5 \\ 1 & 3 & x+4 \end{pmatrix}\xrightarrow[S_1+(x-2)S_2\to S_1]{S_2+S_3\to S_2}\begin{pmatrix} 0 & (x-2)(x-4)-3 & -5(x-2)-5 \\ 0 & x-1 & x-1 \\ 1 & 3 & x+4 \end{pmatrix}$$

אז

$$p_A(x)=(x-1)\det(\begin{pmatrix} 0 & x^2-6x+5 & -5(x-1) \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & x+4 \end{pmatrix})=(x-1)(x^2-6x+5+5x-5)=(x-1)(x^2-x)=x(x-1)^2$$

ולכן יש שני ערכים עצמיים x=0,1.

נציב x=0 ונקבל את המטריצה A. נחשב את Ker(A) ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}\xrightarrow[S_1+2S_3\to S_1]{S_2+S_3\to S_2}\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}\xrightarrow{S_3+3S_2\to S_3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

אם נפתר נקבל וקטור עצמי (1,1,-1) הצמוד לערך העצמי 0.

נחשב את Ker(I-A).

$$\begin{pmatrix} 1-2 & -3 & -5 \\ -1 & 1-4 & -5 \\ 1 & 3 & 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ -1 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

ולכן המשואה המאפינת את Ker(I-A) היא x+3y+5z=0 ויש למרחב העצמי הצמוד לערך העצמי x=1 בסיס בן שני וקטורים, למשל (3,-1,0),(5,0,-1).

נביט בבסיס בן 3 הוקטורים העצמיים ונבטא את L בבסיס זה:

$L(1,1,-1)=(0,0,0)=0b_1+0b_2+0b_3$.
$L(5,0,-1)=(5,0,-1)=0b_1+1b_2+0b_3$.
$L(3,-1,0)=(3,-1,0)=0b_1+0b_2+1b_3$.

ולכן:

$$A = {}_B[L]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כעת ננסה לבדק עבדה זו על ידי המשואה

$${}_B[L]_B = {}_B[T]_E\, {}_E[L]_E\, {}_E[T]_B$$

ונקבל:

$${}_E[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$ נבצע הפוך ונקבל:

$${}_B[T]_E = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$ ואז:

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & -4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & -4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כדרוש.