

משפט

נתונה מטריצה רבועית  $A \in M_{n,n}(F)$ . התנאים הבאים שקולים

1.  $A$  מטריצה הפיכה.
2. לכל  $\bar{b} \in F^n$ , למשוואה  $A\bar{v} = \bar{b}$  יש פתרון יחיד.
3.  $\bar{v} = \bar{0}$  הוא פתרון יחיד למשוואה  $A\bar{v} = \bar{0}$ .
4. צורת המדרגות הקנונית היחידה המתאימה ל- $A$  היא  $I$ .
5.  $A$  היא מכפלה של מטריצות אלמנטריות.
6.  $\det(A) \neq 0$ .
7.  $rk(A) = n$ .
8. דרגת השורות של  $A$  שווה ל- $n$ .
9. הקבוצה המכילה את השורות של  $A$  היא קבוצה פורשת של  $F^n$ .
10. הקבוצה המכילה את השורות של  $A$  היא בסיס של  $F^n$ .
11. הקבוצה המכילה את השורות של  $A$  היא בת"ל ב- $F^n$ .
12. דרגת העמודות של  $A$  שווה ל- $n$ .
13. הקבוצה המכילה את העמודות של  $A$  היא קבוצה פורשת של  $F^n$ .
14. הקבוצה המכילה את העמודות של  $A$  היא בסיס של  $F^n$ .
15. הקבוצה המכילה את העמודות של  $A$  היא בת"ל ב- $F^n$ .
16.  $A$  היא מטריצת מעבר מבסיס לבסיס.

הוכחה

הכחנו בסמסטר א כי  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 1$ .

אחר כך הוכחנו בסמסטר א כי  $1 \rightarrow 6 \rightarrow 1$ .

ראינו כי פעולות אלמנטריות שומרות על מרחב השורות של המטריצה, ולכן אם נניח כי תנאי 4 מתקיים אז מרחב השורות של  $A$  שווה למרחב השורות של  $I$  שזהו כל  $F^n$ , ולכן  $4 \rightarrow 9$ . הוכחנו כי עבור קבוצה של  $n$  וקטורים במרחב בעל ממד  $n$ , קבוצה היא פורשת אם ורק אם היא בת"ל אם ורק אם היא בסיס, ולכן נקבל  $4 \rightarrow 10 \rightarrow 11$  ואילו  $11 \wedge 4 \equiv \overline{11 \rightarrow 4}$  היה גורר כי השורות של  $A$  הן בת"ל אבל לאחר פעולות אלמנטריות מקבלים שורת 0, כלומר יש בין השורות תלות וזו סתירה. לכן קבלנו כי  $4 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 4$ . לפי ההגדרה  $9 \rightarrow 8 \rightarrow 9$ .

הוכחנו כי דרגת השורות שוה לדרגת העמודות ולמספר המשותף סימנו  $rk(A)$ , ולכן  $8 \rightarrow 12 \rightarrow 7 \rightarrow 8$ . לפי  
 ההגדרה  $13 \rightarrow 12 \rightarrow 13$  ושוב כמו שקבלנו את  $9 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 9$  נקבל  $13 \rightarrow 14 \rightarrow 15 \rightarrow 13$ . הוכחנו כי  
 כל מטריצת מעבר מבסיס לבסיס היא הפיכה ולכן  $16 \rightarrow 1$ . אם  $A$  היא מטריצה הפיכה אז לפי 14 קבוצת  
 העמודות של  $A$  היא בסיס  $B$  של  $F^n$ , וכמו כן נסמן ב- $E$  את הבסיס הסטנדרטי של  $F^n$ . תכונת הבסיס  
 הסטנדרטי היא שהקואורדינטות של כל וקטור ביחס אליו הן הרכיבים (הרגילים) של הוקטור, ולכן העמודות של  
 ${}_E[M]_B$  הן העמודות של  $A$ , כלומר מתקיים  ${}_E[M]_B = A$  ולכן מתקיים  $1 \rightarrow 16$ .