<u>מבחן סוף באלגברה לינארית א למדעי המחשב</u>

<u>סמסטר קיץ התשפ״א מועד א</u>

יום ד יז חשון התשפ״ב 20-10-2021

- מורה : גיורא דולה, מתרגל : רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שלוש שעות.
- ללא חומר עזר-מותרים מחשבונים
- התשובות לכל השאלות תכתבנה במחברות.
- הציון המקסימלי במבחן הוא 100 .
- עליך לענות על 11 שאלות ב-4 חלקים.
- בחלק הראשון 7 שאלות במשקל של 10 נקודות כל אחת. עליך לבחור 6 מתוך 7 שאלות סה״כ 60 נקודות בחלק הראשון.
- בחלק השני 4 שאלות במשקל של 5 נקודות כל אחת. בכל תשובה כזו יש לסמן במעגל את האופציה הנכונה, ולהוסיף נמוק קצר. הסימון והנמוק יהיו בשאלון. אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר. אם התשובה היא לא מספיקה דוגמא נגדית. סה״כ 20 נקודות בחלק השני.
- בחלק השלישי שאלת נסוח והוכחה אחת בת משקל של 20 נקודות
- $60+20+20=100$

בהצלחה.

חלק א- שאלות 1-7 ועליך לבחור מתוכן ולענות על 6. משקל כל שאלה 10 נקודות.

שאלה 1 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & =1 \\ 4x & +5y & +6z & =4 \\ 9x & +7y & +8z & =-3 \end{cases}$$

מעל השדה מודולו אחד עשרה Z_{11}.

א. חשב את המטריצה ההפוכה של מטריצת המקדמים.

ב. חשב את הפתרון של המערכת.

שאלה 2 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x & +y & +bz & =2b \\ 2x & +(b+1)y & +4z & =9 \\ 4x & +5y & +8z & =17 \end{cases}$$

פתור את המערכת במחברתך ומצא במחברתך עבור אלו ערכים של b למערכת יש אינסוף פתרונות, אף פתרון או פתרון יחיד.

שאלה 3 (10 נקודות)

נתונה A_n מטריצה רבועית nxn המוגדרת על ידי

$$A_{i,j} = \begin{cases} 4 & i = j+1 & 2 \le i \le n \\ 2 & j = i+1 & 1 \le i \le n-1 \\ 8 & i = j & i = 2k+1 \\ 1 & i = j & i = 2k \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

א.כתוב את המטריצות המתאימות עבור n=1,2,3,4,5,6.
ב.מצא קשר בין det(An) ובין הדטרמיננטים של מטריצות בעלות ממד יותר נמוך וכתוב נוסחת נסיגה עבור det(An).
ג.מצא את det(An) כפונקציה מפורשת של n.
ד. פתור את המשואה Av=0.

שאלה 4 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות:

$$\left\{\begin{array}{llll} (1+i)x & +(2+i)y & & =1 \\ (3+i)x & & +(4+i)z & =2 \\ (5+i)x & +(6+i)y & +(7+i)z & =3 \end{array}\right\}$$

מעל שדה המרוכבים.

א. חשב את הדטרמיננט של מטריצת המקדמים.

ב. חשב את רכיב x של הפתרון של המערכת.

שאלה 5 (10 נקודות)

א. חשב את $\dfrac{(1+i)^{10}(\sqrt{3}-i)^{20}}{(\sqrt{3}+i)^{10}(1-i)^{20}}$

ב. מצא במחברתך את כל המטריצות A אשר מקימות את המשואה :

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

<u>שאלה 6 (10 נקודות)</u>

נתונה מטריצה A מסדר 3x3 ונתון כי $a_{3,1} = 3, a_{1,3} = 1, a_{3,3} = 5, a_{1,1} = 4$ וכי

$$A^* = \begin{pmatrix} -68 & -8 & 64 \\ -22 & 17 & -14 \\ 52 & -29 & -34 \end{pmatrix}$$

מצא את כל המטריצות האפשריות A. . המקיימות את הנתונים

<u>שאלה 7 (10 נקודות)</u>.

חשב את הדטרמיננט של המטריצה A המוגדרת להלן :

$$A=\begin{pmatrix} a+1 & a^2+a & a^2 \\ 2a+b+3 & 2a^2+b^2+2a+b & 2a^2+b^2 \\ 2a+2b+c+5 & 2a^2+2b^2+c^2+2a+2b+c & 2a^2+2b^2+c^2 \end{pmatrix}$$

<u>חלק ב</u>

בחלק זה ארבע שאלות בנות 5 נקודות כל אחת. עליך להקיף את התשובה הנכונה בכל שאלה ולתת נמוק קצר לתשובתך. הנמוק יכתב בשאלון . כל השאלות הן שאלות חובה. אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר. אם התשובה היא לא מספיקה דוגמא נגדית.

<u>שאלה 8 (5 נקודות)</u>

נתונה מטריצה רבועית אז A מתקיים $adj(-A)=-adj(A)$

נכון לא נכון

נמוק קצר

<u>שאלה 9 (5 נקודות)</u>

B,A מטריצות הפיכות אז מתקיים $adj(AB)=adj(A)adj(B)$

נכון לא נכון

נמוק קצר

<u>שאלה 10 (5 נקודות)</u>

קימת מטריצה רבועית A המקיימת $(I+A)(I-A)=I$

נכון לא נכון

נמוק קצר

<u>שאלה 11 (5 נקודות)</u>

נתונות מטריצות A,B,C המקיימות $AB=AC$ אז נובע כי $B=C$

נכון לא נכון

נמוק קצר

<u>חלק ג</u>

<u>שאלה 12 (20 נקודות)</u>

נסח והוכח את משפט 5 הנקודות.

מותר להשתמש בטענות עזר שהוכחנו בכתה, בתנאי שתנסח אותן במדויק <u>בנפרד מההוכחה.</u>

פתרונות

תשובה 1

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}10 & 8 & 4\\ 0 & 7 & 3\\ 8 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

ואכן $A^{-1}A=\begin{pmatrix}10&8&4\\0&7&3\\8&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\9&7&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ ו נוכל לפתר את המערכת :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&8&4\\0&7&3\\8&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\8\\7\end{pmatrix}$$

תשובה 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & b & 2b \\ 2 & b+1 & 4 & 9 \\ 4 & 5 & 8 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-4S_1\to S_3]{S_2-2S_1\to S_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & b & 2b \\ 0 & b-1 & 4-2b & 9-4b \\ 0 & 1 & 8-4b & 17-8b \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[S_2\leftrightarrow S_3]{S_3-S_2\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & b & 2b \\ 0 & 1 & 8-4b & 17-8b \\ 0 & 2-b & 4-2b & 8-4b \end{pmatrix} \xrightarrow{b\neq 2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & b & 2b \\ 0 & 1 & 8-4b & 17-8b \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[S_3-S_2\to S_3]{S_2\leftrightarrow S_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & b & 2b \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4b-6 & 8b-13 \end{pmatrix}$$

$$b=\frac{3}{2}\to no-solution, b=2, \begin{pmatrix} 1 & 1 & b & 2b \\ 2 & b+1 & 4 & 9 \\ 4 & 5 & 8 & 17 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to y=0, x+2z=3.$$

עבור b=3 למערכת יש אינסוף פתרונות.   b=-7/2 אין פתרון עבור כל b אחר למערכת יש פתרון יחיד.

תשובה 3

$$A_6=\begin{pmatrix}8&2&0&0&0&0\\4&1&2&0&0&0\\0&4&8&2&0&0\\0&0&4&1&2&0\\0&0&0&4&8&2\\0&0&0&0&4&1\end{pmatrix}$$

$\det(A_{2n+1})=8\det(A_{2n})-8\det(A_{2n-1})$

$\det(A_{2n+2})=\det(A_{2n+1})-8\det(A_{2n})$

$\det(A_{2n+1})=8(\det(A_{2n-1})-8\det(A_{2n-2}))-8\det(A_{2n-1})=$

$-64\det(A_{2n-2}))$

$\det(A_{2n+2})=\det(A_{2n+1})-8\det(A_{2n})$

נשים לב כי $=(8\det(A_{2n})-8\det(A_{2n-1}))-8\det(A_{2n})=-64\det(A_{2n-1}))$

$\det(A_{n+1})=-64\det(A_{n-2})$.

$\det(A_1)=8, \det(A_2)=0, \det(A_3)=-64$

ולכן נקבל

$$\det(A_{3n+k})=\begin{cases}0 & k=2\\(-64)^{n+1} & k=3\\8(-64)^n & k=1\end{cases}$$

ה. עבור $n\neq 2(\bmod 3)$ הפתרון היחיד הוא וקטור ה-0. עבור $n=2(\bmod 3)$

הפתרון הוא וקטור מהצורה $(1,-4,0,8,-4,0,-32,0,64,-32,\ldots)$

תשובה 4

נתונה מערכת המשוואות :

$$\left\{\begin{array}{llll} (1+i)x & +(2+i)y & & =1 \\ (3+i)x & & +(4+i)z & =2 \\ (5+i)x & +(6+i)y & +(7+i)z & =3 \end{array}\right\}$$

$$\det(A)=-(4+i)[(1+i)(6+i)-(2+i)(5+i)]$$

$$-(7+i)(2+i)(3+i)=-(4+i)[-4]$$

$$-(7+i)(5+5i)=16+4i-(30+40i)=$$

$$-14-36i$$

$$\det(A_x)=-(4+i)[1(6+i)-3(2+i)]$$

$$-(7+i)(2+i)2=-(4+i)(-2i)-2(13+9i)$$

$$=-2+8i-26-18i=-28-10i$$

$$x=\frac{28+10i}{14+36i}$$

תשובה 5 א

$$\frac{(1+i)^{10}(\sqrt{3}-i)^{20}}{(\sqrt{3}+i)^{10}(1-i)^{20}}\frac{(\sqrt{3}-i)^{15}}{(1-i)^{20}}=$$

$$=\frac{(\sqrt{2}cis(45))^{10}(2cis(-30))^{20}}{(2cis(30))^{10}(\sqrt{2}cis(-45))^{20}}=$$

$$=\frac{2^{25}cis(-150)}{2^{20}cis(-600)}=2^{5}cis(450)=$$

$$=2^{5}cis(90)=32i.$$

סעיף ב

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 43 \\ 36 \end{pmatrix}$$

תשובה 6

נסמן

$$A^* = \begin{pmatrix} -68 & -8 & 64 \\ -22 & 17 & -14 \\ 52 & -29 & -34 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & a & 1 \\ b & c & d \\ 3 & e & 5 \end{pmatrix}$$

נשתמש בנתונים ונקבל משוואות

$$3d - 5b = 48, b - 4d = -29 \rightarrow b = 7, d = 9$$

$$e - 5a = -22, 3a - 4e = -14 \rightarrow a = 6, e = 8$$

$$5c - de = -62 \rightarrow 5c - 72 = -62 \rightarrow e = 2.$$

תשובה 7

נתונה המטריצה A ונפעל עליה פעולות יסודיות

$$\begin{pmatrix} a+1 & a^2+a & a^2 \\ 2a+b+3 & 2a^2+b^2+2a+b & 2a^2+b^2 \\ 2a+2b+c+5 & 2a^2+2b^2+c^2+2a+2b+c & 2a^2+2b^2+c^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2-c_3\to c_2}$$

$$\begin{pmatrix} a+1 & a & a^2 \\ 2a+b+3 & 2a+b & 2a^2+b^2 \\ 2a+2b+c+5 & 2a+2b+c & 2a^2+2b^2+c^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1-c_2\to c_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 3 & 2a+b & 2a^2+b^2 \\ 5 & 2a+2b+c & 2a^2+2b^2+c^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3-S_2\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 3 & 2a+b & 2a^2+b^2 \\ 2 & b+c & b^2+c^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_2-2S_1\to S_2} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 2 & b+c & b^2+c^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3-S_2\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 2 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

תשובה 8

לא נכון. אם רבועית מסדר אי זוגי גדול מ 1 אז נובע כי $Adj(-A)=Adj(A)$.

תשובה 9

נכון .

$$adj(A)=(A^{-1})^T\det(A),\ adj(B)=(B^{-1})^T\det(B)\rightarrow$$
$$adj(A)adj(B)=(A^{-1})^T\det(A)(B^{-1})^T\det(B)=$$
$$\det(A)\det(B)(A^{-1})^T(B^{-1})^T=\det(AB)((AB)^{-1})^T=adj(AB)$$

תשובה 10

נכון לדוגמא $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

תשובה 11

לא נכון לדוגמא $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$