

מבחן סוף באלגברה לינארית א למדעי המחשב

סמסטר קיץ התשפ"א מועד ב

יום ד כ כסלו התשפ"ב 24-11-2021

- מורה : גיורא דולה, מתרגל : רענן שכטר.
- משך המבחן הוא שלוש שעות.
- ללא חומר עזר-מותרים מחשבונים
- התשובות לכל השאלות תכתבנה במחברות.
- הציון המקסימלי במבחן הוא 100 .
- עליך לענות על 11 שאלות ב-4 חלקים.
- בחלק הראשון 7 שאלות במשקל של 10 נקודות כל אחת. עליך לבחור 6 מתוך 7 שאלות שה"כ 60 נקודות בחלק הראשון.
- בחלק השני 4 שאלות במשקל של 5 נקודות כל אחת. בכל תשובה כזו יש לסמן במעגל את האופציה הנכונה, ולהוסיף נמוק קצר. הסימון והנמוק יהיו בשאלון. אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר. אם התשובה היא לא מספיקה דוגמא נגדית. שה"כ 20 נקודות בחלק השני.
- בחלק השלישי שאלת נסוח והוכחה אחת בת משקל של 20 נקודות
- $60+20+20=100$

בהצלחה.

שאלה 1 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשואות:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = 4 \\ 9x + 7y + 8z = -3 \end{cases}$$

מעל השדה מודולו שבע Z_7 .

א. חשב את המטריצה ההפוכה של מטריצת המקדמים.

ב. חשב את הפתרון של המערכת.

שאלה 2 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשואות:

$$\begin{cases} 2x + by + 4z = 3b \\ 4x + 7y + 3bz = 7b - 1 \\ 8x + (4b + 1)y + 17z = 38 \end{cases}$$

פתור את המערכת במחברתך ומצא במחברתך עבור אלו ערכים של b למערכת יש אינסוף פתרונות, אף פתרון או פתרון יחיד.

שאלה 3 (10 נקודות)

נתונה A_n מטריצה רבועית $n \times n$ המוגדרת על ידי

$$A_{i,j} = \begin{cases} 3 & i = j + 1 & 2 \leq i \leq n \\ 2 & j = i + 1 & 1 \leq i \leq n - 1 \\ 6 & i = j & i = 2k + 1 \\ 1 & i = j & i = 2k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- א. כתוב את המטריצות המתאימות עבור $n=1,2,3,4,5,6$.
- ב. מצא קשר בין $\det(A_n)$ ובין הדטרמיננטים של מטריצות בעלות ממד יותר נמוך וכתוב נוסחת נסיגה עבור $\det(A_n)$.
- ג. מצא את $\det(A_n)$ כפונקציה מפורשת של n .
- ד. פתור את המשוואה $Av=0$.

שאלה 4 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1+i)x + (2+i)z = 1 \\ (3+i)y + (4+i)z = 2 \\ (5+i)x + (6+i)y + (7+i)z = 3 \end{array} \right.$$

מעל שדה המרוכבים.

א. חשב את הדטרמיננט של מטריצת המקדמים.

ב. חשב את רכיב z של הפתרון של המערכת.

שאלה 5 (10 נקודות)

$$\frac{(1+i)^{15} (\sqrt{3}-i)^{25}}{(\sqrt{3}+i)^{15} (1-i)^{25}} \quad \text{א. חשב את}$$

ב. מצא במחברתך את כל המטריצות A אשר מקימות את המשוואה:

עמותה רשומה 580242451

ביה"ס למדעי המחשב והמתמטיקה ע"ש עמי וטדי שגיא

$$\begin{pmatrix} 4 & -9 & 6 & 12 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \\ 2 & -11 & 8 & 16 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

שאלה 6 (10 נקודות)

נתונה מטריצה A מסדר 3×3 ונתון כי $a_{1,1} = 0, a_{1,2} = 5, a_{1,3} = 1$ וכי

$$A^* = \begin{pmatrix} 6 & -36 & 39 \\ -23 & -3 & 15 \\ -1 & 6 & -30 \end{pmatrix}$$

מצא את כל המטריצות האפשריות A. המקיימות את הנתונים

שאלה 7 (10 נקודות)

חשב את הדטרמיננט של המטריצה A המוגדרת להלן:

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & a^2+a & a^2 \\ 2a+b^2+3 & 2a^2+b^4+2a+b^2 & 2a^2+b^4 \\ 2a+2b^2+c^3+5 & 2a^2+2b^4+c^6+2a+2b^2+c^3 & 2a^2+2b^4+c^6 \end{pmatrix}$$

חלק ב

בחלק זה ארבע שאלות בנויות 5 נקודות כל אחת. עליך להקיף את התשובה הנכונה בכל שאלה ולתת נמוק קצר לתשובתך. הנמוק יכתב בשאלון. כל השאלות הן שאלות חובה. אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר. אם התשובה היא לא מספיקה דוגמא נגדית.

שאלה 8 (5 נקודות)

אם $I + A$ הפיכה אז A הפיכה
נכון

לא נכון

נמוק קצר

שאלה 9 (5 נקודות)

אם $A^3 - 5A = 0$ ו A הפיכה אז מתקיים $\det(A)$ אי רציונלי

לא נכון

נכון

נמוק קצר

שאלה 10 (5 נקודות)

במטריצה A החליפו את העמודות $1, N$, את העמודות $2, N-1$ וכן הלאה והתקבלה מטריצה B . אז מתקיים $\det(B) = -\det(A)$

לא נכון

נכון

נמוק קצר

שאלה 11 (5 נקודות)

לכל מטריצות A, B מתקיים, $\text{adj}(A+B) = \text{adj}(A) + \text{adj}(B)$.

לא נכון

נכון

נמוק קצר

חלק ג

שאלה 12 (20 נקודות)

הוכח כי מטריצה היא הפיכה אם ורק אם הדטרמיננט שלה שונה מ-0.

מותר להשתמש בטענות עזר שהוכחנו בכתה, בתנאי שתנסח אותן במדויק בנפרד מההוכחה.

פתרונות

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 7 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & -19 & -9 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 4 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 4 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

תשובה 2

עמותה רשומה 580242451

ביה"ס למדעי המחשב והמתמטיקה ע"ש עמי וטדי שגיא

$$\begin{pmatrix} 2 & b & 4 & 3b \\ 4 & 7 & 3b & 7b-1 \\ 8 & 4b+1 & 17 & 38 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{S_2-2S_1 \rightarrow S_2 \\ S_3-4S_1 \rightarrow S_3}]{\quad} \begin{pmatrix} 2 & b & 4 & 3b \\ 0 & 7-2b & 3b-8 & b-1 \\ 0 & 1 & 1 & 38-12b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & b & 4 & 3b \\ 0 & 1 & 1 & 38-12b \\ 0 & 0 & * & ** \end{pmatrix}$$

$$* = 5b - 15$$

$$** = (b-1) - (38-12b)(7-2b) = -24b^2 + 161b - 267 = -24(b-3)\left(b - \frac{89}{48}\right)$$

$$b = 3 \rightarrow \text{many - solutions, } b = 3, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow y + z = 2, 2x + z = 3.$$

תשובה 3

$$A_6 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_{2n+1}) = 6 \det(A_{2n}) - 6 \det(A_{2n-1})$$

$$\det(A_{2n+2}) = \det(A_{2n+1}) - 6 \det(A_{2n})$$

$$\det(A_{2n+1}) = 6(\det(A_{2n-1}) - 6 \det(A_{2n-2})) - 6 \det(A_{2n-1}) = -36 \det(A_{2n-2})$$

$$\det(A_{2n+2}) = \det(A_{2n+1}) - 6 \det(A_{2n})$$

$$= (6 \det(A_{2n}) - 6 \det(A_{2n-1})) - 6 \det(A_{2n}) = -36 \det(A_{2n-1})$$

נשים לב כי

$$\det(A_{n+1}) = -36 \det(A_{n-2}).$$

$$\det(A_1) = 6, \det(A_2) = 0, \det(A_3) = -36$$

ולכן נקבל

$$\det(A_{3n+k}) = \begin{cases} 0 & k = 2 \\ (-36)^{n+1} & k = 3 \\ 6(-36)^n & k = 1 \end{cases}$$

ה. עבור $n \equiv 2 \pmod{3}$ הפתרון היחיד הוא וקטור ה-0. עבור $n \not\equiv 2 \pmod{3}$ הפתרון הוא וקטור מהצורה

$$\left(1, -3, 0, \frac{9}{2}, -\frac{27}{2}, 0, \frac{81}{4}, \frac{-243}{4}, 0, -\frac{729}{8}, -\frac{2187}{8}, \dots\right)$$

תשובה 4

נתונה מערכת המשוואות:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1+i)x + (2+i)z = 1 \\ (3+i)y + (4+i)z = 2 \\ (5+i)x + (6+i)y + (7+i)z = 3 \end{array} \right.$$

$$\det(A) = (3+i)[(1+i)(7+i) - (2+i)(5+i)]$$

$$-(4+i)(1+i)(6+i) = (3+i)[-3+i]$$

$$-(4+i)(5+7i) = -10 - (13+33i) =$$

$$-23 - 33i$$

$$\det(A_z) = (3+i)[3(1+i) - 1(5+i)]$$

$$-(1+i)(6+i)2 = (3+i)(-2+2i) - 2(5+7i)$$

$$= (-8+4i) - 10 - 14i = -18 - 10i$$

$$z = \frac{18+10i}{23+33i}$$

תשובה 5 א

$$\begin{aligned} & \frac{(1+i)^{15} (\sqrt{3}-i)^{25}}{(\sqrt{3}+i)^{15} (1-i)^{25}} = \\ & = \frac{(\sqrt{2}cis(45))^{15} (2cis(-30))^{25}}{(2cis(30))^{15} (\sqrt{2}cis(-45))^{25}} = \\ & = \frac{2^{32.5} cis(-75)}{2^{27.5} cis(-675)} = 2^5 cis(600) = \\ & = 2^5 cis(240) = -16(1 + \sqrt{3}i). \end{aligned}$$

סעיף ב

$$\begin{pmatrix} 4 & -9 & 6 & 12 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \\ 2 & -11 & 8 & 16 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

עמותה רשומה 580242451

ביה"ס למדעי המחשב והמתמטיקה ע"ש עמי וטדי שגיא

$$\begin{pmatrix} 4 & -9 & 6 & 12 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \\ 2 & -11 & 8 & 16 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & e & k & p \\ b & f & l & q \\ c & g & m & r \\ d & h & n & s \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a & e & k & p \\ b & f & l & q \\ c & g & m & r \\ d & h & n & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -9 & 6 & 12 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \\ 2 & -11 & 8 & 16 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -9 & 6 & 12 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \\ 2 & -11 & 8 & 16 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

עמותה רשומה 580242451

ביה"ס למדעי המחשב והמתמטיקה ע"ש עמי וטדי שגיא

$$\begin{pmatrix} 4 & -9 & 6 & 12 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \\ 2 & -11 & 8 & 16 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & e & k & p \\ b & f & l & q \\ c & g & m & r \\ d & h & n & s \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a & e & k & p \\ b & f & l & q \\ c & g & m & r \\ d & h & n & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -9 & 6 & 12 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \\ 2 & -11 & 8 & 16 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \\ n \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \\ n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -9 & 6 & 12 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \\ 2 & -11 & 8 & 16 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

תשובה 6

נסמן

$$A^* = \begin{pmatrix} 6 & -36 & 39 \\ -23 & -3 & 15 \\ -1 & 6 & -30 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

נכפול ונקבל

$$A(A^*)^T = \begin{pmatrix} -141 \\ \\ \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\det(A) = -141, \quad A^{-1} = \frac{(A^*)^t}{-141} =$$

$$\frac{\begin{pmatrix} 6 & -23 & -1 \\ -36 & -3 & 6 \\ 39 & 15 & -30 \end{pmatrix}}{-141}, \quad A = (A^{-1})^{-1}$$

עמותה רשומה 580242451

ביה"ס למדעי המחשב והמתמטיקה ע"ש עמי וטדי שגיא

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -23 & -1 \\ -36 & -3 & 6 \\ 39 & 15 & -30 \end{pmatrix}$$

-141

$$, A = (A^{-1})^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ -141 \end{array} \left(\begin{array}{ccc} 6 & -23 & -1 \\ -36 & -3 & 6 \\ 39 & 15 & -30 \end{array} \right) \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ -141 \end{array} \left(\begin{array}{ccc} 6 & -23 & -1 \\ 0 & -141 & 0 \\ -141 & 705 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ -30 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$- \left(\begin{array}{ccc} \frac{6}{141} & \frac{-23}{141} & \frac{-1}{141} \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{array} \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ -30 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$- \left(\begin{array}{ccc} \frac{6}{141} & \frac{-23}{141} & \frac{-1}{141} \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 \end{array} \right) \rightarrow$$

עמותה רשומה 580242451

ביה"ס למדעי המחשב והמתמטיקה ע"ש עמי וטדי שגיא

$$- \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-1}{141} & \frac{-3}{141} & \frac{-7}{141} & \frac{-6}{141} \\ 0 & -1 & 0 & -6 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ I & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

תשובה 7

נתונה המטריצה A ונפעל עליה פעולות יסודיות

580242451 עמותת רשומה

ביה"ס למדעי המחשב והמתמטיקה ע"ש עמי וטדי שגיא

$$\begin{pmatrix} a+1 & a^2+a & a^2 \\ 2a+b^2+3 & 2a^2+b^4+2a+b^2 & 2a^2+b^4 \\ 2a+2b^2+c^3+5 & 2a^2+2b^4+c^6+2a+2b^2+c^3 & 2a^2+2b^4+c^6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2-c_3 \rightarrow c_2} \begin{pmatrix} a+1 & a & a^2 \\ 2a+b^2+3 & 2a+b^2 & 2a^2+b^4 \\ 2a+2b^2+c^3+5 & 2a+2b^2+c^3 & 2a^2+2b^4+c^6 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1-c_2 \rightarrow c_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 3 & 2a+b^2 & 2a^2+b^4 \\ 5 & 2a+2b^2+c^3 & 2a^2+2b^4+c^6 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3-S_2 \rightarrow S_3} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 3 & 2a+b^2 & 2a^2+b^4 \\ 2 & b^2+c^3 & b^4+c^6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_2-2S_1 \rightarrow S_2} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b^2 & b^4 \\ 2 & b^2+c^3 & b^4+c^6 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3-S_2 \rightarrow S_3} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b^2 & b^4 \\ 1 & c^3 & c^6 \end{pmatrix}$$

תשובה 8

לא נכון. לדוגמא $A = A - A$ מטריצת האפס

תשובה 9

$$\begin{aligned} A^3 - 5A &= 0 \rightarrow A(A^2 - 5I) = 0, \det A \neq 0 \\ \rightarrow A^2 - 5I &= 0 \rightarrow A^2 = 5I \rightarrow \det(A)^2 = 5 \quad \text{נכון} \\ \rightarrow \det(A) &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

תשובה 10

$$\det(B) = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \det(A) \quad \text{לא נכון}$$

תשובה 11

לא נכון. לכל מינור (זאטוט) דטרמיננט של סכום זאטוטים איננו סכום הדטרמיננטים.