מבחן סוף באלגברה לינארית א למדעי המחשב

סמסטר קיץ התשפ״ב מועד א

יום ד טו חשון התשפ״ג 9-11-2023

- מורה : גיורא דולה.
- משך המבחן הוא שלוש שעות.
- ללא חומר עזר-מותרים מחשבונים
- התשובות לכל השאלות תכתבנה במחברות.
- הציון המקסימלי במבחן הוא 100 .
- עליך לענות על 11 שאלות ב-4 חלקים.
- בחלק הראשון 5 שאלות במשקל של 10 נקודות כל אחת.
- בחלק השני שאלה אחת מספר 6 במשקל 20 נקודות.
- בחלקים א ו ב אפשר לצבור 60 נקודות סך הכל. אפשר לפתור למשל את שאלה 6 ובנוסף 4 מהשאלות 1-5, או לפתור את שאלות 1-5 וחצי משאלה 6. :
- בחלק השלישי 4 שאלות במשקל של 5 נקודות כל אחת. בכל תשובה כזו יש לסמן במעגל את האופציה הנכונה, ולהוסיף נמוק קצר. הסימון והנמוק יהיו בשאלון. אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר. אם התשובה היא לא מספיקה דוגמא נגדית. סה״כ 20 נקודות בחלק השלישי.
- בחלק הרביעי שאלת נסוח והוכחה אחת בת משקל של 20 נקודות
- .60+20+20=100
- מחליטן=דטרמיננט

.

בהצלחה.

רח' האוניברסיטה 1, קרית יצחק רבין, נתניה 42365 • טל': 8607777 (972-9) • פקס: 8844439 (972-9)
1 University St., Kiryat Yitzhak Rabin, Netanya 42365 - ISRAEL • Tel.: (972-9) 8607777 • Fax: (972-9) 8844439

טבלת פונקציות טריגונומטריות :

deg	rad	sin	cos	tan	cot
0	0	0	1	0	∞
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0

חלק א- שאלות 1-5 . משקל כל שאלה 10 נקודות.
חלק ב- שאלה 6 . משקלה 20 נקודות.

בחלקים א ו ב אפשר לצבור 60 נקודות סך הכל. אפשר לפתור למשל את שאלה 6 ובנוסף 4 מהשאלות 1-5, או לפתור את שאלות 1-5 וחצי משאלה 6. :

<u>שאלה 1 (10 נקודות)</u>

נתונה מערכת המשואות :

$$\begin{Bmatrix} 3x & +2y & +3z & =1 \\ 4x & +6y & +2z & =4 \\ 6x & -6y & +z & =-3 \end{Bmatrix}$$

מעל השדה מודולו שבע Z_7.

א. חשב את המטריצה ההפוכה של מטריצת המקדמים.

ב. חשב את הפתרון של המערכת.

<u>שאלה 2 (10 נקודות)</u>

נתונה מערכת המשואות :

$$\left\{\begin{array}{llll} x & +(b+1)y & +5z & =8 \\ bx & +3y & +2bz & =7 \\ 4x & +(4b+1)y & +14z & =10b+3 \end{array}\right\}$$

פתור את המערכת במחברתך ומצא במחברתך עבור אלו ערכים של b למערכת יש אינסוף פתרונות, אף פתרון או פתרון יחיד. עבור אותם b שיש למערכת אינסוף פתרונות, מצא את אינסוף הפתרונות.

<u>שאלה 3 (10 נקודות)</u>

נתונה A_n מטריצה רבועית nxn המוגדרת על ידי

$$A_{i,j}=\begin{cases} 5 & j=i \quad 1\le i\le n \\ 25 & j=i+1 \quad 1\le i\le n-1 \\ 1 & j=i-1 \quad 2\le i\le n \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

א.כתוב את המטריצות המתאימות עבור n=1,2,3,4,5,6.
ב.מצא קשר בין det(An) ובין הדטרמיננטים של מטריצות בעלות ממד יותר נמוך וכתוב נוסחת נסיגה עבור det(An).
ג.מצא את det(An) כפונקציה מפורשת של n.
ד. פתור את המשואה Av=0.

<u>שאלה 4 (10 נקודות)</u>

נתונה מערכת המשואות :

$$\left\{\begin{array}{llll}(17+9i)x & +(2+i)y & +(2+i)z & =1+i \\ (4+i)x & & & =6 \\ (25-i)x & +(3+2i)y & +(2-2i)z & =5\end{array}\right\}$$

מעל שדה המרוכבים.

א. חשב את הדטרמיננט של מטריצת המקדמים.

ב. חשב את רכיב x של הפתרון של המערכת.

<u>שאלה 5 (10 נקודות)</u>

א. חשב את

$$\frac{(\sqrt{3}+i)^{12}}{(1-i)^{20}}$$

ב. מצא במחברתך את כל המטריצות A אשר מקימות את המשוואה :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

<u>שאלה 6 (20 נקודות)</u>

שאלות 6,7 אוחדו לשאלה אחת שמספרה 6 ומשקלה 20 נקודות

נתונה מטריצה A מסדר 3x3 ונתון כי

$$A^* = \begin{pmatrix} 12 & -24 & 12 \\ -22 & 14 & -4 \\ 2 & 2 & -16 \end{pmatrix}$$

א. 7 נקודות סמן את איברי A באותיות וכתוב אילו משוואות מתקיימות. ב. 13 נקודות : מצא את כל המטריצות האפשריות A המקיימות את הנתונים.

חלק ג

בחלק זה ארבע שאלות בנות 5 נקודות כל אחת. עליך להקיף את התשובה הנכונה בכל שאלה ולתת נמוק קצר לתשובתך. הנמוק יכתב בשאלון . כל השאלות הן שאלות חובה. אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר. אם התשובה היא לא מספיקה דוגמא נגדית.

שאלה 8 (5 נקודות)

נתונה מטריצה A מסדר 3×3 נגדיר מטריצה B מסדר 3×3 על ידי הנוסחאות $b_{1,1}=a_{1,3},b_{1,2}=a_{2,3},b_{1,3}=a_{3,3},b_{2,1}=a_{1,2},b_{2,2}=a_{2,2},b_{2,3}=a_{3,2},b_{3,1}=a_{1,1},b_{3,2}=a_{2,1},b_{3,3}=a_{3,1}$. אז יש שויון של מחליטנים $\det(B)=\det(A)$

נכון לא נכון

נמוק קצר

שאלה 9 (5 נקודות)

נתונה מטריצה A מסדר $n\times n$. אשר מקיימת את השויון $\forall i,1\le i\le n,\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}=0$. אז קים שויון של מחליטנים $\det(A)=0$

נכון לא נכון

נמוק קצר

שאלה 10 (5 נקודות)

נתונה מטריצה A מסדר $n \times n$. ונתון כי $A^3 = 0$ אז $A^2 = 0$
.

נכון

לא נכון

נמוק קצר

שאלה 11 (5 נקודות)

נתונה המערכת $Av = b$ כך ש A איננה הפיכה וקיים לפחות פתרון אחד. אז למערכת יש אינסוף פתרונות.

נכון

לא נכון

נמוק קצר

חלק ד

שאלה 12 (20 נקודות)

נסח והוכח את משפט 5 הנקודות.

מותר להשתמש בטענות עזר שהוכחנו בכתה, בתנאי שתנסח אותן במדויק בנפרד מההוכחה.

פתרונות

תשובה 1

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_2-2S_3\to S_2]{S_1-3S_3\to S_1} \begin{pmatrix} -15 & -1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ -8 & 4 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 6 & 4 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{6S_1\to S_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 6 & 0 & 3 \\ 6 & 4 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[2S_1+S_3\to S_3]{S_2+S_1\to S_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{3S_2\to S_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-3S_2\to S_3]{S_1-S_2\to S_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

ואכן $A^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \\ 6 & -6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ו נוכל לפתר את המערכת :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

תשובה 2

$$\begin{pmatrix} 1 & b+1 & 5 & 8 \\ b & 3 & 2b & 7 \\ 4 & 4b+1 & 14 & 10b+3 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-4S_1\to S_3]{S_2-bS_1\to S_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & b+1 & 5 & 8 \\ 0 & 3-b^2-b & -3b & 7-8b \\ 0 & -3 & -6 & 10b-29 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_3/(-3)\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & b+1 & 5 & 8 \\ 0 & 3-b^2-b & -3b & 7-8b \\ 0 & 1 & 2 & (29-10b)/3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_2-(3-b^2-b)S_3\to S_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & b+1 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & (29-10b)/3 \\ 0 & 0 & X & Y \end{pmatrix}$$

$$X = -3b - 2(3-b^2-b) = -6 - b + 2b^2$$

$$= (b-2)(2b+3).$$

$$Y = 7 - 8b - (3-b^2-b)(29-10b)/3.$$

$$= 7 - 8b - [(87 - 30b - 29b^2 + 10b^3 - 29b + 10b^2)/3]$$

$$= 7 - 8b - [(87 - 59b - 19b^2 + 10b^3)/3] = (-66 + 35b + 19b^2 - 10b^3)/3$$

עבור b=2 למערכת יש אינסוף פתרונות. b=-3/2 אין פתרון עבור כל b אחר למערכת יש פתרון יחיד.

תשובה 3

$$A_6 = \begin{pmatrix} 5 & 25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

נשים לב כי

$$\det(A_{n+1}) = 5\det(A_n) - 25\det(A_{n-1}) = 5(5\det(A_{n-1}) - 25\det(A_{n-2}))$$
$$-25\det(A_{n-1}) = -125\det(A_{n-2}), \det(A_1) = 5, \det(A_2) = 0, \det(A_3) = -125$$

ולכן נקבל

$$\det(A_n) = \begin{cases} 0 & n = 3k+2 \\ (-125)^k & n = 3k \\ 5(-125)^k & n = 3k+1 \end{cases}$$

ה. עבור $n \neq 2(\bmod 3)$ הפתרון היחיד הוא וקטור ה-0. עבור $n = 2(\bmod 3)$
הפתרון הוא וקטור מהצורה

$$(125^k, -5\cdot 125^{k-1}, 0, 125^{k-1}, -5\cdot 125^{k-2}, 0, 125^{k-2}, -5\cdot 125^{k-3}, \ldots)$$

תשובה 4

א. נפתח את ה(מחליטן) דטרמיננט לפי שורה אמצעית ונקבל:

$$\det(A) = -(4+i)[(2+i)(2-2i)-(2+i)(3+2i)] =$$
$$-(4+i)(2+i)(-1-4i) = (4+i)(2+i)(1+4i)$$

ב. נציב את וקטור האיברים החפשיים בעמודה השמאלית, נקבל את המטריצה Ay,
ושוב נחשב את ה(מחליטן) דטרמיננט שלה לפי העמודה הימנית ושוב נקבל:

$$\det(A_x) = -6[(2-2i)(2+i)-(2+i)(3+2i)] =$$
$$= -6(2+i)(-1-4i) = 6(2+i)(1+4i).$$

ולכן:

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{6(2+i)(1+4i).}{(4+i)(2+i)(1+4i).} = \frac{6.}{(4+i).} =$$
$$= \frac{6(4-i).}{17.} = \frac{24-6i}{17}.$$

כדרוש.

תשובה 5 א

ב. חשב את $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^{12}}{(1-i)^{20}}$

$$\frac{(\sqrt{3}+i)^{12}}{(1-i)^{20}}=\frac{(2cis(30))^{12}}{(\sqrt{2}cis(-45))^{20}}=$$

$$=\frac{2^{12}cis(360)}{2^{10}cis(-900)}=4cis(1260)=$$

$$=4cis(3\cdot 360+180)=4cis(180)=-4$$

סעיף ב

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c+3e & b+2d+3f \\ 3c+6e & 3d+6f \\ c+3e & d+3f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+4b \\ c & 2c+4d \\ e & 2e+4f \end{pmatrix}$$

מהשואת המטריצות נקבל 6 משואות עם 6 נעלמים.

$$a+2c+3e = a \to 2c+3e = 0$$

$$c = 3c+6e \to 2c+6e = 0$$

$$2c+6e = 2c+3e = 0 \to 3e = 0 \to e = 0, c = 0$$

$$b+2d+3f = 2a+4b$$

$$2c+4d = 3d+6f \to 4d = 3d+6f \to d = 6f$$

$$e = c+3e \to 0 = 0$$

$$2e+4f = d+3f \to 0+4f = d+3f \to d+f = 0$$

$$d = 6f, d+f = 0 \to d = f = 0$$

$$b+2d+3f = 2a+4b \to 2a+3b = 0$$

ולכן נציב . $a=-1.5b$. ונבדק :

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 3 & 6\\0 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1.5 & 1\\0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1.5 & 1\\0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1.5 & 1\\0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1.5 & 1\\0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

לכן הפתרון היחיד הוא כפולה של המטריצה $\begin{pmatrix}-1.5 & 1\\0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$.

תשובה 6

התחלת השאלה והפתרון

נתונה A*, מצא את A

$$A^* = \begin{pmatrix} 12 & -24 & 12 \\ -22 & 14 & -4 \\ 2 & 2 & -16 \end{pmatrix}$$

פתרון

$$A(A^*)^T = \det(A)I_3 \to (A(A^*)^T)^T = (\det(A)I_3)^T$$

$$(A^*)A^T = \det(A)I_3$$

$$\det(A^*)\det(A) = \det(A)^3\det(I) = \det(A)^3$$

$$\det(A^*) = (\det(A))^2$$

נחשב את נציב . $\det(A^*)$.

$$\det\begin{pmatrix} 12 & -24 & 12 \\ -22 & 14 & -4 \\ 2 & 2 & -16 \end{pmatrix} =$$

$$12\cdot 2\cdot 2\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -11 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & -8 \end{pmatrix} =$$

$$48\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -11 & 7 & -2 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} =$$

$$144\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -11 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$=144\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -15 & 9 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$144(45-9)=144\cdot 36=(12\cdot 6)^2$$

ולכן . $\det(A)=72$. כך נחשב את ההפכית של A.

$$A^{-1}=\frac{(A^*)^T}{\det(A)}=\frac{\begin{pmatrix}12 & -22 & 2\\ -24 & 14 & 2\\ 12 & -4 & -16\end{pmatrix}}{72}$$

$$=\frac{\begin{pmatrix}6 & -11 & 1\\ -12 & 7 & 1\\ 6 & -2 & -8\end{pmatrix}}{36}$$

וכעת נחשב את A

$$A=\frac{((A^{-1})^{*})^{T}}{\det(A^{-1})}=\frac{\begin{pmatrix}-54 & -90 & -18\\ -90 & -54 & -54\\ -18 & -18 & -90\end{pmatrix}^{T}}{\frac{1}{72}\cdot 36^{2}}$$

$$=\frac{\begin{pmatrix}-54 & -90 & -18\\ -90 & -54 & -18\\ -18 & -54 & -90\end{pmatrix}}{18}$$

$$=???-\begin{pmatrix}3 & 5 & 1\\ 5 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}$$

אפשרות שניה אחר שחשבנו את DETA .

$$A(A^*)^T = \det(A) I_3 \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & -22 & 2 \\ -24 & 14 & 2 \\ 12 & -4 & -16 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 72 & 0 & 0 \\ 0 & 72 & 0 \\ 0 & 0 & 72 \end{pmatrix}$$

ומקבלים 3 מערכות של משוואות עם 3 נעלמים אותן יש לפתור, למשל

$$\begin{cases} 12a & -24b & +12c & = 72 \\ -22a & +14b & -4c & = 0 \\ 2a & +2b & -16c & = 0 \end{cases}$$

תשובה 8

לא נכון. דוגמא נגדית $A=I_3$ והמחליטן של A הוא 1. אז $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \det(B)=-1$

עוד הסבר: B מתקבלת מהמוחלפת של Aעל ידי החלפת שתי שורות ולכן המחליטן שלה שוה למינוס של המחליטן של A מוחלפת שהוא מינוס המחליטן של A.

תשובה 9

נכון . התנאי אומר כי העמודה הראשונה ועוד השניה ועוד השלישית וכדומה היא עמודת ה -0, ואלו פעולות יסודיות על העמודות, אשר נשמרות על ידי מחליטן (אולי יש מינוס), ולכן על ידי פעולות מקבלים עמודת 0, ולכן המחליטן הוא 0.

תשובה 10

לא נכון דוגמא נגדית $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, A^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, A^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

תשובה 11

לא נכון . יש אמנם משתנים חפשיים בהם אפשר להציב איברים מהשדה, אבל אם השדה סופי, גם מספר הפתרונות סופי. התרגיל נכון עבור שדות האינסופיים $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$