

מבחן סוף באלגברה לינארית א למדעי המחשב

סמסטר קיץ התשפ"ב מועד ב

יום ביח כסלו התשפ"ג 12-12-2023

- מורה: גיורא דולה.
- משך המבחן הוא שלוש שעות.
- ללא חומר עזר-מותרים מחשבוני
- התשובות לכל השאלות תכתבנה במחברות.
- הציון המקסימלי במבחן הוא 100 .
- עליך לענות על 10 שאלות ב-4 חלקים.
- בחלק הראשון 5 שאלות במשקל של 10 נקודות כל אחת, מהן ניתן לבחור 4.
- בחלקים הבאים אין בחירה.
- בחלק השני שאלה אחת מספר 6 במשקל 20 נקודות.
- בחלק השלישי 4 שאלות במשקל של 5 נקודות כל אחת. בכל תשובה כזו יש לסמן במעגל את האופציה הנכונה, ולהוסיף נמוק קצר. הסימון והנמוק יהיו בשאלון או במחברת. אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר. אם התשובה היא לא מספיקה דוגמא נגדית. סה"כ 20 נקודות בחלק השלישי.
- בחלק הרביעי שאלת נסוח והוכחה אחת במשקל של 20 נקודות
- $40+20+20+20=100$.
- מחליטן=דטרמיננט

בהצלחה.

deg	rad	sin	cos	tan	cot
0	0	0	1	0	∞
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0

חלק א- שאלות 1-5 . משקל כל שאלה 10 נקודות.
חלק ב- שאלה 6 . משקלה 20 נקודות.

עמותה רשומה 580242451

ביה"ס למדעי המחשב והמתמטיקה ע"ש עמי וטדי שגיא

בחלקים א ו ב אפשר לצבור 60 נקודות סך הכל. אפשר לפתור למשל את שאלה 6
ובנוסף 4 מהשאלות 1-5, או לפתור את שאלות 1-5 וחצי משאלה 6.

שאלה 1 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 6y + 2z = 4 \\ 6x - 5y + z = -3 \end{cases}$$

מעל השדה מודולו שבע Z_7 .

א. חשב את המטריצה ההפוכה של מטריצת המקדמים.

ב. חשב את הפתרון של המערכת.

שאלה 2 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x + (b-2)y - z = 1 \\ 2x - y + (b-2)z = 2 \\ (b+1)x + y - z = 4 \end{cases}$$

פתור את המערכת במחברתך ומצא במחברתך עבור אלו ערכים של b למערכת יש אינסוף פתרונות, אף פתרון או פתרון יחיד. עבור אותם b שיש למערכת אינסוף פתרונות, מצא את אינסוף הפתרונות.

שאלה 3 (10 נקודות)

נתונה A_n מטריצה רבועית $n \times n$ המוגדרת על ידי

$$A_{i,j} = \begin{cases} 6 & j=i \quad 1 \leq i \leq n \\ 36 & j=i+1 \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ 1 & j=i-1 \quad 2 \leq i \leq n \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

- א. כתוב את המטריצות המתאימות עבור $n=1,2,3,4,5,6$.
- ב. מצא קשר בין $\det(A_n)$ ובין הדטרמיננטים של מטריצות בעלות ממד יותר נמוך וכתוב נוסחת נסיגה עבור $\det(A_n)$.
- ג. מצא את $\det(A_n)$ כפונקציה מפורשת של n .
- ד. פתור את המשוואה $Av=0$.

שאלה 4 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} (2+i)x + (17+9i)y + (2+i)z = 1+i \\ (5+i)y = 6 \\ (25-i)x + (3+2i)y + (2-2i)z = 5 \end{cases}$$

מעל שדה המרוכבים.

א. חשב את הדטרמיננט של מטריצת המקדמים.

ב. חשב את רכיב y של הפתרון של המערכת.

שאלה 5 (10 נקודות)

$$\frac{(\sqrt{3} + i)^{12} (1 + i)^{18}}{(1 - i)^{20} (\sqrt{3} - i)^{15}} \quad \text{א. חשב את}$$

ב. מצא במחברתך את כל המטריצות A אשר מקימות את המשוואה:

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 9 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

חלק ב

בחלק זה שאלה אחת במשקל 20 נקודות.

שאלה 6 (20 נקודות)
נתונה מטריצה A מסדר 3×3 ונתון כי

$$A^* = \begin{pmatrix} -15 & -10 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

: מצא את כל המטריצות האפשריות A המקיימות את הנתונים.

חלק ג

בחלק זה ארבע שאלות בנות 5 נקודות כל אחת. עליך להקיף את התשובה הנכונה בכל שאלה ולתת נמוק קצר לתשובתך. הנמוק יכתב בשאלון או במחברת. כל השאלות הן שאלות חובה. אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר. אם התשובה היא לא מספיקה דוגמא נגדית.

שאלה 7 (5 נקודות)

נתונה מטריצה A מסדר 3×3 נגדיר מטריצה B מסדר 3×3 על ידי הנוסחאות
 $b_{1,1} = a_{3,1}, b_{1,2} = a_{2,1}, b_{1,3} = a_{1,1}, b_{2,1} = a_{3,2}, b_{2,2} = a_{2,2}, b_{2,3} = a_{1,2}, b_{3,1} = a_{3,3}, b_{3,2} = a_{2,3}, b_{3,3} = a_{1,3}$
אז יש שוויון של מחליטנים $\det(B) = \det(A)$

לא נכון

נכון
נמוק קצר

שאלה 8 (5 נקודות)

נתונה מטריצה A מסדר $n \times n$. אשר מקיימת את השוויון $\sum_{j=1}^n ia_{i,j} = 0, \forall i, 1 \leq i \leq n$. אז קיים שוויון של מחליטנים $\det(A) = 0$

לא נכון

נכון

נמוק קצר

שאלה 9 (5 נקודות)

נתונות מטריצות A, B מסדר $n \times n$. ונתון כי $AB = 0$ או $A = 0$ או $B = 0$.

לא נכון

נכון

נמוק קצר

שאלה 10 (5 נקודות)

נתונה המערכת $Av = b$ כך שלמערכת יש מספר סופי של פתרונות. אז יש למערכת פתרון יחיד.

לא נכון

נכון

נמוק קצר

חלק ד

שאלה 11 (20 נקודות)

נסח והוכח את משפט 5 הנקודות.

מותר להשתמש בטענות עזר שהוכחנו בכתה, בתנאי שתנסח אותן במדויק בנפרד

מההוכחה.

פתרונות

תשובה 1

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{matrix} S_1 - 3S_3 \rightarrow S_1 \\ S_2 - 2S_3 \rightarrow S_2 \end{matrix}]{=} \begin{pmatrix} -15 & 17 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ -8 & 16 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{6S_1 \rightarrow S_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 6 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{matrix} S_2 + S_1 \rightarrow S_2 \\ S_1 + S_3 \rightarrow S_3 \end{matrix}]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{6S_2 \rightarrow S_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 1 & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{matrix} S_1 - 4S_2 \rightarrow S_1 \\ S_3 - 6S_2 \rightarrow S_3 \end{matrix}]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

ונוכל לפתר את המערכת: $A^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ואכן

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

תשובה 2

$$\begin{cases} x & +(b-2)y & -z & = 1 \\ 2x & -y & +(b-2)z & = 2 \rightarrow \\ (b+1)x & +y & -z & = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & +(b-2)y & -z & = 1 \\ 0 & +(3-2b)y & +bz & = 0 \\ 0 & +(1-(b+1)(b-2))y & +bz & = 3-b \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x & -z & +(b-2)y & = 1 \\ 0 & bz & +(3-2b)y & = 0 \\ 0 & bz & +(1-(b+1)(b-2))y & = 3-b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & -z & +(b-2)y & = 1 \\ 0 & bz & +(3-2b)y & = 0 \rightarrow \\ 0 & bz & +(1-(b+1)(b-2))y & = 3-b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & -z & +(b-2)y & = 1 \\ 0 & bz & +(3-2b)y & = 0 \\ 0 & 0 & +(1-(b+1)(b-2))-(3-2b)y & = 3-b \end{cases}$$

$$(1-(b+1)(b-2))-(3-2b) = 1-(b^2-b-2)-3+2b = -b^2+3b = -b(b-3)$$

עבור $b=3$ יש אינסוף פתרונות, עבור $b=0$ אין פתרון

תשובה 3

$$A_6 = \begin{pmatrix} 6 & 36 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 36 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 36 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

נשים לב כי

$$\det(A_{n+1}) = 6 \det(A_n) - 36 \det(A_{n-1}) = 6(6 \det(A_{n-1}) - 36 \det(A_{n-2}))$$

$$-36 \det(A_{n-1}) = -216 \det(A_{n-2}), \det(A_1) = 6, \det(A_2) = 0, \det(A_3) = -216$$

ולכן נקבל

$$\det(A_n) = \begin{cases} 0 & n = 3k + 2 \\ (-216)^k & n = 3k \\ 6(-216)^k & n = 3k + 1 \end{cases}$$

ה. עבור $n \equiv 2 \pmod{3}$ הפתרון היחיד הוא וקטור ה-0. עבור $n \equiv 2 \pmod{3}$ הפתרון הוא וקטור מהצורה

$$(216^k, -6 \cdot 216^{k-1}, 0, 216^{k-1}, -6 \cdot 216^{k-2}, 0, 216^{k-2}, -6 \cdot 216^{k-3}, \dots)$$

א. נפתח את ה(מחליטן) דטרמיננט לפי שורה אמצעית ונקבל:

$$\det(A) = -(5+i)[(2+i)(2-2i) - (2+i)(25-i)] =$$

$$-(5+i)(2+i)(-23-i) = (5+i)(2+i)(23+i)$$

ב. נציב את וקטור האיברים החפשיים בעמודה השמאלית, נקבל את המטריצה A_y , ושוב נחשב את ה(מחליטן) דטרמיננט שלה לפי העמודה הימנית ושוב נקבל:

$$\det(A_y) = -6[(2-2i)(2+i) - (2+i)(25-i)] =$$

$$= -6(2+i)(-23-i) = 6(2+i)(23+i).$$

ולכן:

$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{6(2+i)(23+i)}{(5+i)(2+i)(23+i)} = \frac{6}{(5+i)} =$$

$$= \frac{6(5-i)}{26} = \frac{15-3i}{13}.$$

כדרוש.

תשובה 5 א

$$\frac{(\sqrt{3} + i)^{12} (1 + i)^{18}}{(1 - i)^{20} (\sqrt{3} - i)^{15}}$$

ב. חשב את

$$\begin{aligned} & \frac{(\sqrt{3} + i)^{12} (1 + i)^{18}}{(1 - i)^{20} (\sqrt{3} - i)^{15}} = \\ & = \frac{(2 \operatorname{cis}(30))^{12} (\sqrt{2} \operatorname{cis}(45))^{18}}{(\sqrt{2} \operatorname{cis}(-45))^{20} (2 \operatorname{cis}(-30))^{15}} = \\ & = \frac{2^{12+9} \operatorname{cis}(360 + 810)}{2^{10+15} \operatorname{cis}(-900 - 450)} = 2^{-4} \operatorname{cis}(2520) = \\ & = \frac{\operatorname{cis}(7 \cdot 360)}{16} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

סעיף ב

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 9 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7a+5c & 7b+5d \\ 9a+7c & 9b+7d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10a+6b & 6a+4b \\ 10c+6d & 6c+4d \\ 10e+6f & 6e+4f \end{pmatrix}$$

$$10e+6f = 6e+4f = 0 \rightarrow e = f = 0$$

$$7a+5c = 10a+6b \rightarrow 3a+6b-5c = 0$$

$$7b+5d = 6a+4b \rightarrow 6a-3b-5d = 0$$

$$9a+7c = 10c+6d \rightarrow 9a-3c-6d = 0$$

$$9b+7d = 6c+4d \rightarrow 9b-6c-3d = 0$$

ולכן

עמותה רשומה 580242451

ביה"ס למדעי המחשב והמתמטיקה ע"ש עמי וטדי שגיא

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -5 & 0 \\ 6 & -3 & 0 & -5 \\ 9 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 9 & -6 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & -15 & 10 & -5 \\ 0 & -18 & 12 & -6 \\ 0 & 9 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a = 1, b = 2, c = 3, d = 0$$

ולכן
בדיקה

עמותה רשומה 580242451

ביה"ס למדעי המחשב והמתמטיקה ע"ש עמי וטדי שגיא

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 9 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 14 \\ 30 & 18 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 14 \\ 30 & 18 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

. לכן הפתרון היחיד הוא כפולה של המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

תשובה 6

התחלת השאלה והפתרון

נתונה A^* , מצא את A

פתרון

$$A(A^*)^T = \det(A)I_3 \rightarrow (A(A^*)^T)^T = (\det(A)I_3)^T$$

$$(A^*)A^T = \det(A)I_3$$

$$\det(A^*)\det(A) = \det(A)^3 \det(I) = \det(A)^3$$

$$\det(A^*) = (\det(A))^2$$

נחשב את נציב $\det(A^*)$.

$$\det \begin{pmatrix} -15 & -10 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2 \det \begin{pmatrix} -15 & -5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$2 \det \begin{pmatrix} -15 & -5 & -1 \\ 14 & 4 & 0 \\ -10 & -3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$4 \det \begin{pmatrix} -15 & -5 & -1 \\ 7 & 2 & 0 \\ -10 & -3 & 0 \end{pmatrix} = -4(-21 + 20) = 4$$

ולכן . $\det(A) = 2$. כעת נחשב את ההפכית של A.

$$A^{-1} = \frac{(A^*)^T}{\det(A)} = \frac{\begin{pmatrix} -15 & -1 & 5 \\ -10 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{2}$$

$$(A^{-1})^* \quad \text{וכעת את}$$

$$(A^{-1})^* = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ -4 & -10 & -14 \\ 6 & 10 & 20 \end{pmatrix}}{4}$$

$$A = \frac{((A^{-1})^*)^T}{\det(A^{-1})} \quad \text{וכעת נחשב את } A$$

$$A = \frac{((A^{-1})^*)^T}{\det(A^{-1})} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 6 & -10 & 10 \\ 8 & -14 & 20 \end{pmatrix}}{4} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 6 & -10 & 10 \\ 8 & -14 & 20 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -5 & 5 \\ 4 & -7 & 10 \end{pmatrix}$$

וקל לראות שאכן הצמודה היא זו שהיתה נתונה קודם, כדרוש.

אפשרות שניה אחר שחשבנו את $\det A$.

$$A(A^*)^T = \det(A)I_3 \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -15 & -1 & 5 \\ -10 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ומקבלים 3 מערכות של משוואות עם 3 נעלמים אותן יש לפתור.

תשובה 7

לא נכון. דוגמא נגדית $A=I_3$ והמחליטן של A הוא 1. אז $\det(B)=-1$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

עוד הסבר: B מתקבלת מהמוחלפת של A על ידי החלפת שתי שורות ולכן המחליטן שלה שווה למינוס של המחליטן של A מוחלפת שהוא מינוס המחליטן של A .

תשובה 8

נכון . התנאי אומר כי העמודה הראשונה ועוד פעמיים השניה ועוד שלוש פעמים השלישית וכדומה היא עמודת ה-0, ואלו פעולות יסודיות על העמודות, אשר נשמרות על ידי מחליטן (אולי יש מינוס), ולכן על ידי פעולות מקבלים עמודת 0, ולכן המחליטן הוא 0.

תשובה 10

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 לא נכון דוגמא נגדית

תשובה 11

לא נכון . יש אמנם מספר סופי של פתרונות אבל יתכנו משתנים חפשיים בהם מוצבים ערכים משדה סופי.