מבחן סוף באלגברה לינארית א למדעי המחשב

סמסטר קיץ התשפ״ב מועד ג

יום ב כב טבת התשפ״ג 16-1-2023

- מורה : גיורא דולה.
- משך המבחן הוא שלוש שעות.
- ללא חומר עזר-מותרים מחשבונים
- התשובות לכל השאלות תכתבנה במחברות.
- הציון המקסימלי במבחן הוא 100 .
- עליך לענות על 10 שאלות ב-4 חלקים.
- בחלק הראשון 5 שאלות במשקל של 10 נקודות כל אחת, מהן ניתן לבחור 4.
- בחלקים הבאים אין בחירה.
- בחלק השני שאלה אחת מספר 6 במשקל 20 נקודות.
- בחלק השלישי 4 שאלות במשקל של 5 נקודות כל אחת. בכל תשובה כזו יש לסמן במעגל את האופציה הנכונה, ולהוסיף נמוק קצר. הסימון והנמוק יהיו בשאלון או במחברת. אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר. אם התשובה היא לא מספיקה דוגמא נגדית. סה״כ 20 נקודות בחלק השלישי.
- בחלק הרביעי שאלת נסוח והוכחה אחת במשקל של 20 נקודות
- .40+20+20+20=100
- מחליטן=דטרמיננט

בהצלחה.

טבלת פונקציות טריגונומטריות :

deg	rad	sin	cos	tan	cot
0	0	0	1	0	∞
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0

חלק א- שאלות 1-5 . משקל כל שאלה 10 נקודות.
חלק ב- שאלה 6 . משקלה 20 נקודות.

בחלקים א ו ב אפשר לצבור 60 נקודות סך הכל. אפשר לפתור למשל את שאלה 6 ובנוסף 4 מהשאלות 1-5, או לפתור את שאלות 1-5 וחצי משאלה 6.:

שאלה 1 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשואות:

$$\left\{\begin{array}{llll} 3x & +2y & +3z & =1 \\ 4x & +6y & +2z & =4 \\ 6x & -5y & +z & =-3 \end{array}\right\}$$

מעל השדה מודולו שבע Z_7.

א. חשב את המטריצה ההפוכה של מטריצת המקדמים.

ב. חשב את הפתרון של המערכת.

שאלה 2 (10 נקודות)

נתונה מערכת המשואות:

$$\begin{cases} x & +(b-2)y & -z & =1 \\ 2x & -y & +(b-2)z & =2 \\ (b+1)x & +y & -z & =4 \end{cases}$$

פתור את המערכת במחברתך ומצא במחברתך עבור אלו ערכים של b למערכת יש אינסוף פתרונות, אף פתרון או פתרון יחיד. עבור אותם b שיש למערכת אינסוף פתרונות, מצא את אינסוף הפתרונות.

<u>שאלה 3 (10 נקודות)</u>

נתונה A_n מטריצה רבועית nxn המוגדרת על ידי

$$A_{i,j} = \begin{cases} 6 & j=i \quad 1 \le i \le n \\ 36 & j=i+1 \quad 1 \le i \le n-1 \\ 1 & j=i-1 \quad 2 \le i \le n \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

א.כתוב את המטריצות המתאימות עבור $n=1,2,3,4,5,6$.
ב.מצא קשר בין $\det(An)$ ובין הדטרמיננטים של מטריצות בעלות ממד יותר נמוך וכתוב נוסחת נסיגה עבור $\det(An)$.
ג.מצא את $\det(An)$ כפונקציה מפורשת של n.
ד. פתור את המשוואה $Av=0$.

<u>שאלה 4 (10 נקודות)</u>

נתונה מערכת המשוואות :

$$\begin{cases} (2+i)x & +(17+9i)y & +(2+i)z & =1+i \\ & (5+i)y & & =6 \\ (25-i)x & +(3+2i)y & +(2-2i)z & =5 \end{cases}$$

מעל שדה המרוכבים.

א. חשב את הדטרמיננט של מטריצת המקדמים.

ב. חשב את רכיב y של הפתרון של המערכת.

<u>שאלה 5 (10 נקודות)</u>

א. חשב את
$$\frac{(\sqrt{3}+i)^{12}(1+i)^{18}}{(1-i)^{20}(\sqrt{3}-i)^{15}}$$

ב. מצא במחברתך את כל המטריצות A אשר מקימות את המשוואה :

$$A\begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 9 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

חלק ב

בחלק זה שאלה אחת במשקל 20 נקודות.

שאלה 6 (20 נקודות)

נתונה מטריצה A מסדר 3x3 ונתון כי

$$A^* = \begin{pmatrix} -15 & -10 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

: מצא את כל המטריצות האפשריות A המקיימות את הנתונים.

חלק ג

בחלק זה ארבע שאלות בנות 5 נקודות כל אחת. עליך להקיף את התשובה הנכונה בכל שאלה ולתת נמוק קצר לתשובתך. הנמוק יכתב בשאלון או במחברת . כל השאלות הן שאלות חובה. אם התשובה היא כן יש לתת נמוק קצר. אם התשובה היא לא מספיקה דוגמא נגדית.

שאלה 7 (5 נקודות)

נתונה מטריצה A מסדר $n \times n$. אז $\det(-A^2) \le 0$

.

נכון

לא נכון

נמוק קצר

שאלה 8 (5 נקודות)

נתונות מטריצות A,B מסדר $n \times n$. אז $\det(A-B) = \det(A) - \det(B)$

נכון

לא נכון

נמוק קצר

שאלה 9 (5 נקודות)

נתון כי A הפיכה אז גם A^2 הפיכה .

נכון

לא נכון

נמוק קצר

שאלה 10 (5 נקודות)

נתונה מטריצה רבועית A nxn השונה ממטריצת ה-0 אז גם A^2 איננה מטריצת ה-0

נכון

לא נכון

נמוק קצר

<u>חלק ד</u>

<u>שאלה 11 (20 נקודות)</u>

נסח והוכח את המשפט שלפיו מטריצה היא הפיכה אם ורק אם המחליטן (דטרמיננט) שלה שונה מ-0.

מותר להשתמש בטענות עזר שהוכחנו בכתה, בתנאי שתנסח אותן במדויק <u>בנפרד מההוכחה.</u>

פתרונות

תשובה 1

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_2-2S_3\to S_2]{S_1-3S_3\to S_1} \begin{pmatrix} -15 & 17 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ -8 & 16 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{6S_1\to S_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 6 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_1+S_3\to S_3]{S_2+S_1\to S_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{6S_2\to S_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 1 & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3-6S_2\to S_3]{S_1-4S_2\to S_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

ואכן $A^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ו נוכל לפתר את המערכת :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

תשובה 2

$$\begin{cases} x & +(b-2)y & -z & =1 \\ 2x & -y & +(b-2)z & =2 \\ (b+1)x & +y & -z & =4 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x & +(b-2)y & -z & =1 \\ 0 & +(3-2b)y & +bz & =0 \\ 0 & +(1-(b+1)(b-2))y & +bz & =3-b \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x & -z & +(b-2)y & =1 \\ 0 & bz & +(3-2b)y & =0 \\ 0 & bz & +(1-(b+1)(b-2))y & =3-b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & -z & +(b-2)y & =1 \\ 0 & bz & +(3-2b)y & =0 \\ 0 & bz & +(1-(b+1)(b-2))y & =3-b \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x & -z & +(b-2)y & =1 \\ 0 & bz & +(3-2b)y & =0 \\ 0 & 0 & +(1-(b+1)(b-2))-(3-2b)y & =3-b \end{cases}$$

$$(1-(b+1)(b-2))-(3-2b)=1-(b^2-b-2)-3+2b=-b^2+3b=-b(b-3)$$

עבור b=3 יש אינסוף פתרונות, עבור b=0 אין פתרון

תשובה 3

$$A_6=\begin{pmatrix}6&36&0&0&0&0\\1&6&36&0&0&0\\0&1&6&36&0&0\\0&0&1&6&36&0\\0&0&0&1&6&36\\0&0&0&0&1&6\end{pmatrix}$$

נשים לב כי

$$\det(A_{n+1})=6\det(A_n)-36\det(A_{n-1})=6(6\det(A_{n-1})-36\det(A_{n-2}))$$
$$-36\det(A_{n-1})=-216\det(A_{n-2}),\det(A_1)=6,\det(A_2)=0,\det(A_3)=-216$$

ולכן נקבל

$$\det(A_n)=\begin{cases}0 & n=3k+2\\(-216)^k & n=3k\\6(-216)^k & n=3k+1\end{cases}$$

ה. עבור $n\neq 2(\bmod 3)$ הפתרון היחיד הוא וקטור ה-0. עבור $n=2(\bmod 3)$ הפתרון הוא וקטור מהצורה

$$(216^k,-6\cdot 216^{k-1},0,216^{k-1},-6\cdot 216^{k-2}$$
$$,0,216^{k-2},-6\cdot 216^{k-3},..)$$

תשובה 4

א. נפתח את ה(מחליטן) דטרמיננט לפי שורה אמצעית ונקבל:

$$\det(A) = -(5+i)[(2+i)(2-2i)-(2+i)(25-i)] =$$
$$-(5+i)(2+i)(-23-i) = (5+i)(2+i)(23+i)$$

ב. נציב את וקטור האיברים החפשיים בעמודה השמאלית, נקבל את המטריצה Ay,
ושוב נחשב את ה(מחליטן) דטרמיננט שלה לפי העמודה הימנית ושוב נקבל:

$$\det(A_y) = -6[(2-2i)(2+i)-(2+i)(25-i)] =$$
$$= -6(2+i)(-23-i) = 6(2+i)(23+i).$$

ולכן:

$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{6(2+i)(23+i).}{(5+i)(2+i)(23+i).} = \frac{6.}{(5+i).} =$$
$$= \frac{6(5-i).}{26.} = \frac{15-3i}{13}.$$

כדרוש.

תשובה 5 א

ב. חשב את
$$\frac{(\sqrt{3}+i)^{12}(1+i)^{18}}{(1-i)^{20}(\sqrt{3}-i)^{15}}$$

$$\frac{(\sqrt{3}+i)^{12}(1+i)^{18}}{(1-i)^{20}(\sqrt{3}-i)^{15}}=$$

$$=\frac{(2cis(30))^{12}(\sqrt{2}cis(45))^{18}}{(\sqrt{2}cis(-45))^{20}(2cis(-30))^{15}}=$$

$$=\frac{2^{12+9}cis(360+810)}{2^{10+15}cis(-900-450)}=2^{-4}cis(2520)=$$

$$=\frac{cis(7\cdot 360)}{16}=\frac{1}{16}$$

סעיף ב

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 9 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7a+5c & 7b+5d \\ 9a+7c & 9b+7d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10a+6b & 6a+4b \\ 10c+6d & 6c+4d \\ 10e+6f & 6e+4f \end{pmatrix}$$

$$10e+6f=6e+4f=0 \to e=f=0$$

$$7a+5c=10a+6b \to 3a+6b-5c=0$$

$$7b+5d=6a+4b \to 6a-3b-5d=0$$

$$9a+7c=10c+6d \to 9a-3c-6d=0$$

$$9b+7d=6c+4d \to 9b-6c-3d=0$$

ולכן

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -5 & 0 \\ 6 & -3 & 0 & -5 \\ 9 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 9 & -6 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & -15 & 10 & -5 \\ 0 & -18 & 12 & -6 \\ 0 & 9 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 3 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 3 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן $a=1, b=2, c=3, d=0$

בדיקה

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 9 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 14 \\ 30 & 18 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 14 \\ 30 & 18 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן הפתרון היחיד הוא כפולה של המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

תשובה 6

התחלת השאלה והפתרון

נתונה A^*, מצא את A

פתרון

$$A(A^*)^T = \det(A)I_3 \rightarrow (A(A^*)^T)^T = (\det(A)I_3)^T$$

$$(A^*)A^T = \det(A)I_3$$

$$\det(A^*)\det(A) = \det(A)^3\det(I) = \det(A)^3$$

$$\det(A^*) = (\det(A))^2$$

נחשב את נציב . $\det(A^*)$.

$$\det\begin{pmatrix} -15 & -10 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2\det\begin{pmatrix} -15 & -5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$2\det\begin{pmatrix} -15 & -5 & -1 \\ 14 & 4 & 0 \\ -10 & -3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$4\det\begin{pmatrix} -15 & -5 & -1 \\ 7 & 2 & 0 \\ -10 & -3 & 0 \end{pmatrix} = -4(-21+20) = 4$$

ולכן . $\det(A)=2$. כעת נחשב את ההפכית של A.

$$A^{-1} = \frac{(A^*)^T}{\det(A)} = \frac{\begin{pmatrix} -15 & -1 & 5 \\ -10 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{2}$$

וכעת את $(A^{-1})^*$

$$(A^{-1})^* = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ -4 & -10 & -14 \\ 6 & 10 & 20 \end{pmatrix}}{4}$$

וכעת נחשב את A
$$A = \frac{((A^{-1})^*)^T}{\det(A^{-1})}$$

$$A=\frac{((A^{-1})^{*})^{T}}{\det(A^{-1})}=\frac{\dfrac{\begin{pmatrix}2&-4&6\\6&-10&10\\8&-14&20\end{pmatrix}}{4}}{0.5}=$$

$$=\frac{\begin{pmatrix}2&-4&6\\6&-10&10\\8&-14&20\end{pmatrix}}{2}=\begin{pmatrix}1&-2&3\\3&-5&5\\4&-7&10\end{pmatrix}$$

וקל לראות שאכן הצמודה היא זו שהיתה נתונה קודם, כדרוש.

אפשרות שניה אחר שחשבנו את DETA .

$$A(A^*)^T = \det(A)I_3 \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -15 & -1 & 5 \\ -10 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ומקבלים 3 מערכות של משואות עם 3 נעלמים אותן יש לפתור.

תשובה 7

לא נכון . אמנם $0 \le \det(A^2) = \det(A)\det(A)$ אבל המינוס לא בהכרח כופל את הדטרמיננט במינוס, עבור סדר זוגי סימן הדטרמיננט לא משתנה על ידי -.

תשובה 8

לא נכון דוגמא נגדית $\det(A) = 16 \neq \det(A-B) = \det(B) = 4$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

תשובה 9

כן כי הפוכתה היא A^{-2}.

תשובה 10

לא, מספיקה דוגמא נגדית למשל המטריצה $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, A^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$