המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

<u>המחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב.</u> מבחן באלגברה ליניארית ב, יום רביעי טו אדר א התשפ"ב 16.02.2022 סמסטר א', מועד א'.
מורה: גיורא דולה. משך המבחן: 3 שעות
אפשר להשתמש רק במחשבון כיס. יש לכתוב כל התשובות במחברת.

מבנה המבחן שונה לאחרונה בגלל המעבר לבחינה ברשת.

חלק א'. בחלק זה יש לענות על כל השאלות

1. 20 **נקודות.**
נניח כי n הוא מספר זוגי ויהיו
$U=\{A\in M_n(\mathbf{R}),\forall 1\le i,j\le n, A(i,j)=A(n+1-i,j)=A(i,n+1-j)\}$ ו-
$V=\{A\in M_n(\mathbf{R}),\forall 1\le i,j\le n, A(i,j)=-A(n+1-i,j)\}$

א. הוכח ש U,V הם תתי-מרחבים של $M_n(\mathbf{R})$.
ב. האם $M_n(\mathbf{R})$ הוא הסכום של U ו V?

2. 30 **נקודות.**

נתון המ"ו $V=\{p,p=ax^3+bx^2+cx+d,a,b,c,d\in F\}$ אוסף כל הפולינומים ממעלה 3 מעל שדה F ונביט על $p(x)\equiv 1,q(x)=x,.r(x)=x^2,s(x)=x^3$

א. הוכח $B=\{p,q,r,s\}$. הוא בסיס של V.
ב. הגדר $D:V\to V,D(p)=p'$ הנגזרת. הוכח כי D היא העתקה לינארית.
ג. חשב את מטריצת ההעתקה D כאשר B הוא בסיס של התחום ושל הטווח וסמן אותה A.
ד. חשב את הפולינום האפיני של A.
ה. מצא ל A ערכים עצמיים.
ו. האם A לכסינה? נמק.
ז. חשב את A^2,A^3,A^4
ח. מצא העתקה לינארית $E:V\to V$ כך ש A^3 היא מטריצת ההעתקה שלה בבסיס B של התחום ושל הטווח.

חלק ב. בחלק הזה יש לענות על 5 שאלות בלבד. משקל של כל שאלה: 10 נקודות

3. מצא בסיסים של הסכום והחיתוך של שני תת-מרחבים $U \le \mathbf{R}^5$ ו $V \le \mathbf{R}^5$ כאשר
$U = Sp\{(2,0,2,0,2),(2,3,2,3,2),(8,3,10,1,1)\}$,
$V = Sp\{(3,0,3,0,3),(3,3,3,3,3),(3,2,12,4,10)\}$
. השלם את הבסיס של $U+V$ לבסיס של $\mathbf{R}^5$.

4. נתונה מטריצה ממשית

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & a+b & 5 \\ -6 & 7 & -8 & 9 & -10 \\ 11 & -12 & 13 & -14 & b \end{pmatrix}$$

כאשר a,b הם פרמטרים ממשיים.
א. מצא את כל הערכים של a,b שעבורם הדרגה של A תהיה מינימלית.
ב. לכל הערכים של הפרמטרים שמצאת בחלק א' מצא בסיסים של מרחב העמודות $C(A)$ ושל מרחב השורות $S(A)$

5. נתון המ"ו $\mathbf{Z}_5^3$ מעל $\mathbf{Z}_5$ ונגדיר את $\overline{b}_1 = (1,3,2), \overline{b}_2 = (2,3,4)$. נסמן $B = \{\overline{b}_1, \overline{b}_2\}$

א. מצא משואה שמקיימים כל הוקטורים בתת המרחב $U = Sp\{\overline{b}_1, \overline{b}_2\} = SpB$
ב. הבט בהעתקה הלינארית $f: \mathbf{Z}_5^3 \to \mathbf{Z}_5^3$ המוגדרת על ידי $f(x,y,z) = (z,x,y)$ ומצא את המשואה שמקיים תת המרחב $V = f(U)$
ג. מצא בסיס C עבור V.
ד. נגדיר את g $g: U \to V$ להיות הצמצום של f חשב את מטריצת ההעתקה ${}_C g_B$.
ה. האם קיים וקטור $\overline{v} \in \mathbf{Z}_5^3$ השונה מאפס כך ש- $2[\overline{v}]_B = [\overline{v}]_C$. נמק.

6. נתונה העתקה ליניארית $L: \mathbf{R}_3[x] \to M_2(\mathbf{R})$ המוגדרת ע"י הנוסחה

$$L(p(x)) = \begin{pmatrix} -p(0) & p(1) \\ -p(-1) & p(0) \end{pmatrix}$$

א. חשב את המטריצה של L בבסיסים $B = (1,x,x^2,x^3)$ של $\mathbf{R}_3[x]$ ו $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ של $M_2(\mathbf{R})$. שים לב שהבסיסים אינם סטנדרטיים.
ב. מצא בסיסים של $Ker(L)$ ו $\mathrm{Im}(L)$.

7.. מצא העתקה לינארית L מ-$\mathbf{R}_2[x]$ ל $\mathbf{R}^2$ שמטריצת ${}_A[L]_B$ בבסיסים
$A = (\overline{a}_1 = (1,1), \overline{a}_2 = (1,-1))$ $B = (\overline{b}_1 = x+1, \overline{b}_2 = x^2+x, \overline{b}_3 = x^2+x+1)$
שווה ל- $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

8. נתונה מטריצה ממשית $A=\begin{pmatrix} 4 & -9 & 6 & 12 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \\ 2 & -11 & 8 & 16 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

א. חשב את הפולינום האופייני ואת הערכים העצמיים של A.

ב. מצא בסיסים של המרחבים העצמיים של A.

ג. מצא מטריצה המלכסנת T של A.

בהצלחה !

תשובות

תשובה 1

א1. ברור כי המטריצה שכולה 0 מקיימת את התנאי של U ולכן $U \neq \phi$. יהיו $K,L \in U, a,b \in \mathbf{R}$ ויהיו $1 \leq i,j \leq n$ אז לפי ההגדרה

$K(i,j)=K(n+1-i,j), L(i,j)=L(n+1-i,j)$ ונובע כי

$(aK+bL)(i,j)=aK(i,j)+bL(i,j)=aK(n+1-i,j)+bL(n+1-i,j)=(aK+bL)(n+1-i,j)$

בצורה דומה $K(i,j)=K(i,n+1-j), L(i,j)=L(i,n+1-j)$ ונובע כי

$(aK+bL)(i,j)=aK(i,j)+bL(i,j)=aK(i,n+1-j)+bL(i,n+1-j)=(aK+bL)(i,n+1-j)$

ולכן באמת U הוא תמ״ו.

א2. ברור כי המטריצה שכולה 0 מקיימת את התנאי של V ולכן $V \neq \phi$. יהיו $K,L \in V, a,b \in \mathbf{R}$ ויהיו $1 \leq i,j \leq n$ אז לפי ההגדרה

$K(i,j)=-K(n+1-i,j), L(i,j)=-L(n+1-i,j)$ ונובע כי

$(aK+bL)(i,j)=aK(i,j)+bL(i,j)=-aK(n+1-i,j)+-bL(n+1-i,j)=-(aK+bL)(n+1-i,j)$

ולכן באמת V הוא תמ״ו.

הממד של U הוא $\frac{n^2}{4}=(\frac{n}{2})^2$ ושל V הוא $\frac{n}{2}$ ואלו הממד של $M_n(\mathbf{R})$ הוא n^2 ולכן אחוד בסיסים של המרחבים הללו לא יכול לפרוש את $M_n(\mathbf{R})$ ולכן הסכום איננו $M_n(\mathbf{R})$

תשובה 2

א. ברור כי $B=\{p,q,r,s\}$. פורשת כי כל ax^3+bx^2+cx+d מקיים כי $ax^3+bx^2+cx+d=as+br+cq+dp$ כדרוש וברור כי הקבוצה בת״ל כי $ax^3+bx^2+cx+d \equiv 0$ גורר כי $a=b=c=d=0$ ולכן באמת $B=\{p,q,r,s\}$. בסיס של V.

ב. לפי תכונות הנגזרת

$D(\alpha f+\beta g)=(\alpha f+\beta g)'=\alpha f'+\beta g'=\alpha D(f)+\beta D(g)$ ולכן זו ה״ל.

ג. $D(p)=1'=0, D(q)=x'=1=1\cdot p, D(r)=(x^2)'=2x=2q, D(s)=(x^3)'=x^2=3r$

ולכן

$$[D]_B^B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ד. נחשב את הפולינום האפייני

$$\det([D]_B^B - xI) = \det\begin{pmatrix} -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -x \end{pmatrix} = x^4$$

ה. הפתרון היחיד של הפולינום האפייני הוא $x=0$ וזהו הע״ע היחיד. נציב 0 ב $[D]_B^B - xI = [D]_B^B$ והפתרון של

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to c = b = a = 0$$

כלומר הפולינום הוא d כלומר הוא קבוע ויש רק ו״ע יחיד הרבוי הגיאומטרי קטן מהרבוי האלגברי ולכן A איננה לכסינה.

ו.

ז. $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ח. $E(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 6a$

תשובה 3

. נעביר את U ואת V לצורה של משוואות :

. מצא בסיסים של הסכום והחיתוך של שני תת-מרחבים $U \leq \mathbf{R}^5$ ו $V \leq \mathbf{R}^5$ כאשר

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 8 & a \\ 0 & 3 & 3 & b \\ 2 & 2 & 10 & c \\ 0 & 3 & 1 & d \\ 2 & 2 & 1 & e \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 2 & 8 & a \\ 0 & 3 & 3 & b \\ 0 & 0 & 2 & c-a \\ 0 & 3 & 1 & d \\ 0 & 0 & -7 & e-a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 2 & 8 & a \\ 0 & 3 & 3 & b \\ 0 & 0 & 2 & c-a \\ 0 & 0 & -2 & d-b \\ 0 & 0 & -7 & e-a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 2 & 8 & a \\ 0 & 3 & 3 & b \\ 0 & 0 & 2 & c-a \\ 0 & 0 & 0 & c+d-a-b \\ 0 & 0 & 0 & 2e+2c-9a \end{pmatrix}$$

כלומר U הוא תת מרחב בעל ממד 3 המקיים את המשוואות $a+b=c+d, 2e+7c=9a$ ובצורה דומה

$$\begin{pmatrix}3&3&3&a\\0&3&2&b\\3&3&12&c\\0&3&4&d\\3&3&10&e\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&3&3&a\\0&3&2&b\\0&0&9&c-a\\0&3&4&d\\0&0&7&e-a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&3&3&a\\0&3&2&b\\0&0&9&c-a\\0&0&2&d-b\\0&0&7&e-a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&3&3&a\\0&3&2&b\\0&0&2&c-a\\0&0&0&7(d-b)-2(e-a)\\0&0&7&(c-a)-(e-a)-(d-b)\end{pmatrix}$$

כלומר כלומר V הוא תת מרחב בעל ממד 3 המקיים את המשוואות
$2a+7d=2e+7b, b+c=d+e$ ולכן ונקבל את משוואות החתוך :
$a+b-c-d=0, 9a-7c-2e-0, b+c-d-e=0, 2a-7b+7d-2e=0$ כלומר נקבל
מערכת

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&-1&0\\9&0&-7&0&-2\\0&1&1&-1&-1\\2&-7&0&7&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&-1&0\\0&-9&2&9&-2\\0&1&1&-1&-1\\0&-9&2&9&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&-1&0\\0&1&1&-1&-1\\0&-9&2&9&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&-1&0\\0&1&1&-1&-1\\0&0&11&0&-11\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&-1&-1&0\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0&0\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&0&-1\end{pmatrix}$$

כלומר $a=c=e, b=d$ ולכן $U\cap V=Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ תמ״ו בעל ממד 2, ולכן

$,U=Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}8\\3\\10\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ $V=Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\\12\\4\\10\end{pmatrix}\right\}$, והללו הם בסיסים. האחוד

שלהם הוא בסיס של V+U $U+V=Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}8\\3\\10\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\\12\\4\\10\end{pmatrix}\right\}$, וכדי

להשלים לבסיס של $\mathbf{R}^5$ נוסיף את $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, ונחשב את הדטרמיננט שעמודותיו הן

הבסיס הזה . ואכן

$$\det\begin{pmatrix}1&0&1&8&3\\0&1&0&3&2\\0&0&1&10&12\\0&1&0&1&4\\0&0&1&1&10\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&1&10&12\\1&0&1&4\\0&1&1&0\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&1&10&12\\0&0&-2&2\\0&1&1&0\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1&10&12\\0&-2&2\\1&1&0\end{pmatrix}$$

$$=\det\begin{pmatrix}1&10&12\\0&-2&2\\0&-9&-12\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}-2&2\\-9&-12\end{pmatrix}=24+18=42\neq 0$$

כלומר תוספת של e_1 תשלים את הבסיס של V+U לבסיס של $\mathbf{R}^5$

תשובה 4.

$$\begin{pmatrix}1&-2&3&a+b&5\\-6&7&-8&9&-10\\11&-12&13&-14&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&a+b&5\\0&-5&10&9+6a+6b&20\\0&10&-20&-14-11a-11b&b-55\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&a+b&5\\0&-5&10&9+6a+6b&20\\0&0&0&4+a+b&b-15\end{pmatrix}$$

ולכן הדרגה המינימלית היא כאשר .a=-19,b=15. עבור הערכים הללו בסיס של C(A) הוא {(1,-6,11),(2,-7,12)} .ושל S(A) {(1,-2,3,-4,5),(0,-5,10,-15,20)}

תשובה 5

א. נחשב את המשואה של הוקטורים בתת המרחב.

$$\begin{pmatrix}1&2&a\\3&3&b\\2&4&c\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3+3S_1\to S_3]{S_2+2S_1\to S_2}\begin{pmatrix}1&2&a\\0&7&b+2a\\0&10&c+3a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&a\\0&2&b+2a\\0&0&c+3a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-a-b\\0&2&b+2a\\0&0&c+3a\end{pmatrix}$$ ולכן

כפי שקל לודא , הוקטורים של Bמקיימים מעל $\mathbf{Z}_5$ את המשואה $c+3a=0$

ב. ההעתקה מחליפה בין הקואורדינטות ולכן ב V מתקיים $a+3b=0$.

ג. נבחר את C להיות התמונות של אברי B כלומר $C=\{\overline{c}_1,\overline{c}_2\}$

$\overline{c}_1=(2,1,3),\overline{c}_2=(4,2,3)$.

ד. מטריצת ההעתקה ${}_Cf_B$ היא המטריצה $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I$

ה. $[\overline{v}]_C = {}_Cf_B[\overline{v}]_B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}[\overline{v}]_B=[\overline{v}]_B$ וידוע כי $2[\overline{v}]_B=[\overline{v}]_C$. ולכן צריך להתקיים

$2[\overline{v}]_B=[\overline{v}]_C=[\overline{v}]_B$. על ידי העברת אגפים $[\overline{v}]_B=0$.

תשובה 6.

$$L(1)=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=-A_1+A_2-2A_3+A_4,\ L(x^2)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=A_2-A_3$$

ולכן מטריצת

$$L(x)=L(x^3)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=A_2+A_3$$

ההעתקה בבסיסים הללו היא $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ -2 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. לכן

$$\operatorname{Im}(L)=Sp\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}=Sp\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}=Sp\left\{\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}-x & y\\ x+z & x\end{pmatrix},x,y,z\in R\right\}$$

ו

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ -2 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$Ker(L)=\{p=ax^3+bx^2+cx+d,a=c=0=b+d=0\},p=bx^2-b=b(x^2-1),b\in R\}$$
$$=Sp\{x^2-1\}$$

תשובה 7

$$B=(\overline{b_1}=x+1,\overline{b_2}=x^2+x,\overline{b_3}=x^2+x+1)\to$$
$$x^2=\overline{b_3}-\overline{b_1},x=\overline{b_2}-x^2=\overline{b_2}-(\overline{b_3}-\overline{b_1})=\overline{b_1}+\overline{b_2}-\overline{b_3},1=\overline{b_3}-\overline{b_2},$$
$$L(1)=L(\overline{b_3}-\overline{b_2})=(2(1,1)-2(1,-1))-((1,1)-(1,-1))=(0,2).$$
$$L(x)=L(\overline{b_1}+\overline{b_2}-\overline{b_3})=2(1,1)+((1,1)-(1,-1))-(2(1,1)-2(1,-1))=$$
$$=2(1,1)-(1,1)+(1,-1)=(0,2).$$
$$L(x^2)=L(\overline{b_3}-\overline{b_1})=(2(1,1)-2(1,-1))-2(1,1)=(-2,2).$$
$$L(ax^2+bc+c)=aL(x^2)+bL(x)+cL(1)=a(-2,2)+b(0,2)+c(0,2)=(-2a,2(a+b+c))$$
$$=2(-a,a+b+c).$$

תשובה 8

$$p=\det\begin{pmatrix}4-x&-9&6&12\\0&-1-x&4&6\\2&-11&8-x&16\\-1&3&0&-1-x\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}4-x&-9&6&12\\0&-1-x&4&6\\0&-5&8-x&14-2x\\-1&3&0&-1-x\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}4-x&3-3x&6&12\\0&-1-x&4&6\\0&-5&8-x&14-2x\\-1&0&0&-1-x\end{pmatrix}$$
$$=\det\begin{pmatrix}4-x&3-3x&6&0\\0&-1-x&4&-2\\0&-5&8-x&-2\\-1&0&0&-1-x\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}4-x&3-3x&6&0\\0&-1-x&4&-2\\0&-4+x&4-x&0\\-1&0&0&-1-x\end{pmatrix}=(x-4)\det\begin{pmatrix}4-x&3-3x&6&0\\0&-1-x&4&-2\\0&1&-1&0\\-1&0&0&-1-x\end{pmatrix}=$$
$$(x-4)\det\begin{pmatrix}4-x&9-3x&6&0\\0&3-x&4&-2\\0&0&-1&0\\-1&0&0&-1-x\end{pmatrix}=(x-4)(3-x)\det\begin{pmatrix}4-x&3&6&0\\0&1&4&-2\\0&0&-1&0\\-1&0&0&-1-x\end{pmatrix}=(x-4)(3-x)[(4-x)(x+1)+\det\begin{pmatrix}3&6&0\\1&4&-2\\0&-1&0\end{pmatrix}]=$$
$$=(x-4)(3-x)[(4-x)(x+1)+2(-3)]=(x-4)(3-x)(-x^2+3x-2)=(x-4)(3-x)(1-x)(x-2)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4).$$

לכן הע״ע העצמיים של A הם 1,2,3,4,נציב כל ע״ע במערכת ונמצא ו״ע הצמודים להם. עבור 1 נקבל

$$\begin{pmatrix}4-x&-9&6&12\\0&-1-x&4&6\\2&-11&8-x&16\\-1&3&0&-1-x\end{pmatrix}\lambda=1\to\begin{pmatrix}3&-9&6&12\\0&-2&4&6\\2&-11&7&16\\-1&3&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&6&6\\0&-2&4&6\\0&-5&7&12\\-1&3&0&-2\end{pmatrix}$$

פורש את המרחב

$$\to\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&-2&4&6\\0&-1&-1&0\\-1&3&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&6&6\\0&-1&-1&0\\-1&0&-3&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&-1&-1&0\\-1&0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-z\\-z\\0\\-z\end{pmatrix}=-z\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

הצמוד עבור 2 נקבל

פורש

$$\begin{pmatrix} 4-x & -9 & 6 & 12 \\ 0 & -1-x & 4 & 6 \\ 2 & -11 & 8-x & 16 \\ -1 & 3 & 0 & -1-x \end{pmatrix} \lambda=2 \to \begin{pmatrix} 2 & -9 & 6 & 12 \\ 0 & -3 & 4 & 6 \\ 2 & -11 & 6 & 16 \\ -1 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -3 & 6 & 6 \\ 0 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & -5 & 6 & 10 \\ -1 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & -3 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & 10 \\ -1 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 10 \\ -1 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3w \\ 2w \\ 0 \\ w \end{pmatrix} = w\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

את המרחב הצמוד עבור 3 נקבל

$$\begin{pmatrix} 4-x & -9 & 6 & 12 \\ 0 & -1-x & 4 & 6 \\ 2 & -11 & 8-x & 16 \\ -1 & 3 & 0 & -1-x \end{pmatrix} \lambda=3 \to \begin{pmatrix} 1 & -9 & 6 & 12 \\ 0 & -4 & 4 & 6 \\ 2 & -11 & 5 & 16 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -9 & 6 & 12 \\ 0 & -4 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & -7 & -8 \\ 0 & -6 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

פורש את המרחב

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -9 & 6 & 12 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & -7 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -9 & 6 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 7 & -7 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -9 & 6 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -9 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3y \\ y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

הצמוד עבור 4 נקבל

$$\begin{pmatrix} 4-x & -9 & 6 & 12 \\ 0 & -1-x & 4 & 6 \\ 2 & -11 & 8-x & 16 \\ -1 & 3 & 0 & -1-x \end{pmatrix} \lambda=4 \to \begin{pmatrix} 0 & -9 & 6 & 12 \\ 0 & -5 & 4 & 6 \\ 2 & -11 & 4 & 16 \\ -1 & 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -9 & 6 & 12 \\ 0 & -5 & 4 & 6 \\ 0 & -5 & 4 & 6 \\ -1 & 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

פורש את

$$\to \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 & 6 \\ 0 & -5 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} w \\ 2w \\ w \\ w \end{pmatrix} = w\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

המרחב הצמוד

מטריצה מלכסנת היא

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$