המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

<u>המחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב.</u> מבחן באלגברה ליניארית ב, יום ראשון כא איר התשפ"ב 22.05.2022 סמסטר א', מועד ג'.
מורה: גיורא דולה. משך המבחן: 3 שעות
אפשר להשתמש רק במחשבון כיס. יש לכתוב כל התשובות במחברת.

מבנה המבחן שונה לאחרונה בגלל המעבר לבחינה ברשת.

חלק א'. בחלק זה יש לענות על כל השאלות

1. 20 **נקודות.**
נניח כי $m=4n$ ונגדיר

$$U=\{A\in M_m(\mathbf{R}),\forall 1\le j\le m,\forall 1\le i\le 2n, A(i,j)=A(m+1-i,j)\}$$ ו

$$V=\{A\in M_m(\mathbf{R}),\forall 1\le j\le m,\forall 1\le i\le 2n, A(i,j)=A(2n+i,j)\}$$

א. הוכח ש U,V .הם תתי-מרחבים של $M_n(\mathbf{R})$.

ב. האם $M_n(\mathbf{R})$ הוא הסכום של U ו V?

ענה בקצרה על שתי השאלות הבאות

<u>שאלה 2 (15 נקודות)</u>

אם A לכסינה אז A -I לכסינה

נכון   לא נכון

נמוק קצר

<u>שאלה 3 (15 נקודות)</u>

נתונות מטריצה רבועית A. בעלת פולינום אפייני p_A ו ומטריצה רבועית B. בעלת פולינום אפייני p_B. אז הפולינום האפיני של $A+B$. הוא p_A+p_B

נכון   לא נכון

נמוק קצר

חלק ב. בחלק הזה יש לענות על 5 שאלות בלבד. משקל של כל שאלה: 10 נקודות

4. מצא בסיסים של הסכום והחיתוך של שני תת-מרחבים $U \le \mathbf{R}^5$ ו $V \le \mathbf{R}^5$ כאשר

$$U = Sp\{(2,3,2,3,2),(9,5,13,2,3),(3,7,9,5,3)\},$$

$$V = Sp\{(1,2,3,1,2),(8,6,12,3,10),(6,9,5,8,3)\}$$

. השלם את הבסיס של $U+V$ לבסיס של $\mathbf{R}^5$.

5. נתונה מטריצה ממשית

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & a+b & 5 \\ -7 & 7 & -8 & 9 & -10 \\ 10 & -13 & 17 & -14 & b \end{pmatrix}$$

כאשר a,b הם פרמטרים ממשיים.

א. מצא את כל הערכים של a,b שעבורם הדרגה של A תהיה מינימלית.

ב. לכל הערכים של הפרמטרים שמצאת בחלק א' מצא בסיסים של מרחב העמודות $C(A)$ ושל מרחב השורות $S(A)$

6. נתון המ"ו $\mathbf{Z}_5^3$ מעל $\mathbf{Z}_5$ ונגדיר את $\overline{b_1} = (1,3,2), \overline{b_2} = (2,3,2)$. נסמן $B = \{\overline{b_1}, \overline{b_2}\}$

א. מצא משואה שמקיימים כל הוקטורים בתת המרחב $U = Sp\{\overline{b_1}, \overline{b_2}\} = SpB$

ב. הבט בהעתקה הלינארית $f : \mathbf{Z}_5^3 \to \mathbf{Z}_5^3$ המוגדרת על ידי $f(x,y,z) = (z,x,y)$ ומצא את המשואה שמקיים תת המרחב $V = f(U)$

ג. מצא בסיס C עבור V.

ד. נגדיר את g $g:U \to V$ להיות הצמצום של f חשב את מטריצת ההעתקה $_C g_B$.

ה. האם קיים וקטור $\overline{v} \in \mathbf{Z}_5^3$ השונה מאפס כך ש- $3[\overline{v}]_B = [\overline{v}]_C$. נמק.

7. נתונה העתקה ליניארית $L : \mathbf{R}_3[x] \to M_2(\mathbf{R})$ המוגדרת ע"י הנוסחה

$$L(p(x)) = \begin{pmatrix} p(1) & p(1) \\ -p(-1) & p(0) \end{pmatrix}$$

א. חשב את המטריצה של L בבסיסים $B = (1, x, x^2, x^3)$ של $\mathbf{R}_3[x]$ ו $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ של $M_2(\mathbf{R})$. שים לב שהבסיסים אינם סטנדרטיים.

ב. מצא בסיסים של $Ker(L)$ ו $\mathrm{Im}(L)$.

8.. מצא העתקה לינארית L מ-$\mathbf{R}_2[x]$ ל $\mathbf{R}^2$ שמטריצת ${}_A[L]_B$ בבסיסים

$B=(\overline{b_1}=x+1,\overline{b_2}=x^2+x,\overline{b_3}=x^2+x+1)$ $A=(\overline{a_1}=(1,1),\overline{a_2}=(1,-1))$

שווה ל- $\begin{pmatrix}2&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}$

9. נתונה מטריצה ממשית $A=\begin{pmatrix}-11&2&16&8\\3&-1&-1&0\\-9&4&12&6\\-1&0&6&4\end{pmatrix}$.

א. חשב את הפולינום האופייני ואת הערכים העצמיים של A .

ב. מצא בסיסים של המרחבים העצמיים של A .

ג. מצא מטריצה המלכסנת T של A .

בהצלחה !

תשובות

תשובה 1 חלקית

$$\frac{n}{2}+\frac{n}{2}-\frac{n}{4}\neq n$$

במקום תשובה 4

$$\begin{pmatrix}1&2&8&1\\2&3&3&4\\3&2&10&7\\1&3&1&2\\2&2&1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&9&3\\2&3&5&7\\3&2&13&9\\1&3&2&5\\2&2&3&3\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&2&7&4\\2&3&4&6\\3&2&9&3\\1&3&2&5\\2&2&8&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&8&6\\2&3&6&9\\3&2&12&5\\1&3&3&8\\2&2&10&3\end{pmatrix}\rightarrow$$

תשובה 5חלקית.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & a+b & 5 \\ -7 & 7 & -8 & 9 & -10 \\ 10 & -13 & 17 & -14 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & a & 4 \\ 0 & -7 & 13 & 9+6a+6b & 20 \\ 0 & 7 & -13 & -14-11a-11b & b-55 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & a & 4 \\ 0 & -5 & 10 & 9+6a+6b & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 4+a+b & b-15 \end{pmatrix}$$

תשובה 6

א. נחשב את המשואה של הוקטורים בתת המרחב.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & 3 & b \\ 2 & 4 & c \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3+3S_1\to S_3]{S_2+2S_1\to S_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 7 & b+2a \\ 0 & 10 & c+3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 2 & b+2a \\ 0 & 0 & c+3a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a-b \\ 0 & 2 & b+2a \\ 0 & 0 & c+3a \end{pmatrix}$$ ולכן

כפי שקל לודא , הוקטורים של Bמקיימים מעל $\mathbf{Z}_5$ את המשואה $c+3a=0$

ב. ההעתקה מחליפה בין הקואורדינטות ולכן ב V מתקיים $a+3b=0$.

ג. נבחר את C להיות התמונות של אברי B כלומר $C=\{\overline{c}_1,\overline{c}_2\}$

$\overline{c}_1=(2,1,3),\overline{c}_2=(4,2,3)$.

ד. מטריצת ההעתקה ${}_Cf_B$ היא המטריצה $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ה. $2[\overline{v}]_B=[\overline{v}]_C$. וידוע כי $[\overline{v}]_C={}_Cf_B[\overline{v}]_B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}[\overline{v}]_B=[\overline{v}]_B$. ולכן צריך להתקיים

$2[\overline{v}]_B=[\overline{v}]_C=[\overline{v}]_B$. על ידי העברת אגפים $[\overline{v}]_B=0$.

תשובה 7.

$$L(1)=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=-A_1+A_2-2A_3+A_4, L(x^2)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=A_2-A_3$$

ולכן מטריצת

$$L(x)=L(x^3)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=A_2+A_3$$

ההעתקה בבסיסים הללו היא $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. לכן

$$\mathrm{Im}(L)=Sp\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}=Sp\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}=Sp\left\{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix} -x & y \\ x+z & x \end{pmatrix}, x,y,z\in R\right\}$$

ו

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Ker(L) = \{p = ax^3 + bx^2 + cx + d, a = c = 0 = b + d = 0\}, p = bx^2 - b = b(x^2 - 1), b \in R\}$$
$$= Sp\{x^2 - 1\}$$

תשובה 8

$$B = (\overline{b_1} = x + 1, \overline{b_2} = x^2 + x, \overline{b_3} = x^2 + x + 1) \to$$
$$x^2 = \overline{b_3} - \overline{b_1}, x = \overline{b_2} - x^2 = \overline{b_2} - (\overline{b_3} - \overline{b_1}) = \overline{b_1} + \overline{b_2} - \overline{b_3}, 1 = \overline{b_3} - \overline{b_2},$$
$$L(1) = L(\overline{b_3} - \overline{b_2}) = (2(1,1) - 2(1,-1)) - ((1,1) - (1,-1)) = (0,2).$$
$$L(x) = L(\overline{b_1} + \overline{b_2} - \overline{b_3}) = 2(1,1) + ((1,1) - (1,-1)) - (2(1,1) - 2(1,-1)) =$$
$$= 2(1,1) - (1,1) + (1,-1) = (0,2).$$
$$L(x^2) = L(\overline{b_3} - \overline{b_1}) = (2(1,1) - 2(1,-1)) - 2(1,1) = (-2,2).$$
$$L(ax^2 + bc + c) = aL(x^2) + bL(x) + cL(1) = a(-2,2) + b(0,2) + c(0,2) = (-2a, 2(a + b + c))$$
$$= 2(-a, a + b + c).$$

תשובה חלקית 9

$$A = old\begin{pmatrix} 4 & -9 & 6 & 12 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \\ 2 & -11 & 8 & 16 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} new\begin{pmatrix} -11 & 2 & 16 & 8 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ -9 & 4 & 12 & 6 \\ -1 & 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$p=\det\begin{pmatrix}4-x & -9 & 6 & 12\\ 0 & -1-x & 4 & 6\\ 2 & -11 & 8-x & 16\\ -1 & 3 & 0 & -1-x\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}4-x & -9 & 6 & 12\\ 0 & -1-x & 4 & 6\\ 0 & -5 & 8-x & 14-2x\\ -1 & 3 & 0 & -1-x\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}4-x & 3-3x & 6 & 12\\ 0 & -1-x & 4 & 6\\ 0 & -5 & 8-x & 14-2x\\ -1 & 0 & 0 & -1-x\end{pmatrix}$$

$$=\det\begin{pmatrix}4-x & 3-3x & 6 & 0\\ 0 & -1-x & 4 & -2\\ 0 & -5 & 8-x & -2\\ -1 & 0 & 0 & -1-x\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}4-x & 3-3x & 6 & 0\\ 0 & -1-x & 4 & -2\\ 0 & -4+x & 4-x & 0\\ -1 & 0 & 0 & -1-x\end{pmatrix}=(x-4)\det\begin{pmatrix}4-x & 3-3x & 6 & 0\\ 0 & -1-x & 4 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & -1-x\end{pmatrix}=$$

$$(x-4)\det\begin{pmatrix}4-x & 9-3x & 6 & 0\\ 0 & 3-x & 4 & -2\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & -1-x\end{pmatrix}=(x-4)(3-x)\det\begin{pmatrix}4-x & 3 & 6 & 0\\ 0 & 1 & 4 & -2\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & -1-x\end{pmatrix}=(x-4)(3-x)[(4-x)(x+1)+\det\begin{pmatrix}3 & 6 & 0\\ 1 & 4 & -2\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}]=$$

$$=(x-4)(3-x)[(4-x)(x+1)+2(-3)]=(x-4)(3-x)(-x^2+3x-2)=(x-4)(3-x)(1-x)(x-2)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4).$$

לכן הע״ע העצמיים של A הם 1,2,3,4,נציב כל ע״ע במערכת ונמצא ו״ע הצמודים להם. עבור 1 נקבל

$$\begin{pmatrix}4-x & -9 & 6 & 12\\ 0 & -1-x & 4 & 6\\ 2 & -11 & 8-x & 16\\ -1 & 3 & 0 & -1-x\end{pmatrix}\lambda=1\rightarrow\begin{pmatrix}3 & -9 & 6 & 12\\ 0 & -2 & 4 & 6\\ 2 & -11 & 7 & 16\\ -1 & 3 & 0 & -2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0 & 0 & 6 & 6\\ 0 & -2 & 4 & 6\\ 0 & -5 & 7 & 12\\ -1 & 3 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

פורש את המרחב

$$\rightarrow\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 4 & 6\\ 0 & -1 & -1 & 0\\ -1 & 3 & 0 & -2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 6 & 6\\ 0 & -1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -3 & -2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-z\\ -z\\ 0\\ -z\end{pmatrix}=-z\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

הצמוד עבור 2 נקבל

$$\begin{pmatrix}4-x & -9 & 6 & 12\\ 0 & -1-x & 4 & 6\\ 2 & -11 & 8-x & 16\\ -1 & 3 & 0 & -1-x\end{pmatrix}\lambda=2\rightarrow\begin{pmatrix}2 & -9 & 6 & 12\\ 0 & -3 & 4 & 6\\ 2 & -11 & 6 & 16\\ -1 & 3 & 0 & -3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0 & -3 & 6 & 6\\ 0 & -3 & 4 & 6\\ 0 & -5 & 6 & 10\\ -1 & 3 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

פורש

$$\rightarrow\begin{pmatrix}0 & -3 & 6 & 6\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & -5 & 6 & 10\\ -1 & 3 & 0 & -3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0 & -3 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -5 & 0 & 10\\ -1 & 3 & 0 & -3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 3 & 0 & -3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}3w\\ 2w\\ 0\\ w\end{pmatrix}=w\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

את המרחב הצמוד עבור 3 נקבל

$$\begin{pmatrix} 4-x & -9 & 6 & 12 \\ 0 & -1-x & 4 & 6 \\ 2 & -11 & 8-x & 16 \\ -1 & 3 & 0 & -1-x \end{pmatrix} \lambda = 3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -9 & 6 & 12 \\ 0 & -4 & 4 & 6 \\ 2 & -11 & 5 & 16 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -9 & 6 & 12 \\ 0 & -4 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & -7 & -8 \\ 0 & -6 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

פורש את המרחב

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -9 & 6 & 12 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & -7 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -9 & 6 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 7 & -7 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -9 & 6 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -9 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3y \\ y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

הצמוד עבור 4 נקבל

$$\begin{pmatrix} 4-x & -9 & 6 & 12 \\ 0 & -1-x & 4 & 6 \\ 2 & -11 & 8-x & 16 \\ -1 & 3 & 0 & -1-x \end{pmatrix} \lambda = 4 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -9 & 6 & 12 \\ 0 & -5 & 4 & 6 \\ 2 & -11 & 4 & 16 \\ -1 & 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -9 & 6 & 12 \\ 0 & -5 & 4 & 6 \\ 0 & -5 & 4 & 6 \\ -1 & 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

פורש את

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 & 6 \\ 0 & -5 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} w \\ 2w \\ w \\ w \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

המרחב הצמוד

מטריצה מלכסנת היא

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.2