המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

<u>המחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב.</u> מבחן באלגברה ליניארית ב, יום רביעי יז שבט התשפ"ג 08.02.2023 סמסטר א', מועד א'.
מורה: גיורא דולה. משך המבחן: 3 שעות
אפשר להשתמש רק במחשבון כיס. יש לכתוב כל התשובות במחברת.

המבחן כולל 3 חלקים: בחלק א אין בחירה ויש רק שאלה אחת ללא בחירה. משקל התשובה 20 נקודות
בחלק ב יש 5 שאלות שהתשובה לכל אחת היא כן או לא ונימוק קצר. ניחוש נכון ללא נימוק יזכה במעט נקודות. משקל כל תשובה 5 נקודות ואפשר לבחור 4 מתוך 5 השאלות.
בחלק ג זה יש 5 שאלות בנות משקל 15 נקודות כ"א ואפשר לבחור 4 מ5 השאלות ולצבור 60 נקודות סה"כ.

סה"כ 100=20+20+60

בהצלחה

חלק א בחלק זה אין בחירה ויש רק שאלה אחת ללא בחירה. משקל התשובה 20 נקודות.

1. 20 נקודות .הוכח כי מטריצה היא הפיכה אם ורק אם היא מטריצת מעבר מבסיס לבסיס. יש לנסח ולהוכיח את כל טענות העזר. מותר להניח כי מפריצה הפיכה אם ורק אם היא מקיימת את נקודות 1-20)

חלק ב בחלק זה יש 5 שאלות שהתשובה לכל אחת היא כן או לא ונימוק קצר. ניחוש נכון ללא נימוק יזכה במעט נקודות. משקל כל תשובה 5 נקודות ואפשר לבחור 4 מתוך 5 השאלות.

2. 5 נקודות נתונים מרחב וקטורי V וקבוצה חלקית $B \subseteq V$ ונתון כי $\dim(V) < |B|$ כאשר $|B|$ מסמן את מספר איברי B. אז B בת״ל.

נכון   לא נכון

נימוק קצר

3. 5 נקודות נתונים מרחב וקטורי V ושני תתי מרחב שלו U,W אז $U \cup W$ קבוצת האיחוד, אף פעם איננה תמ״ו.

נכון   לא נכון

נימוק קצר

4. 5 נקודות נתונים מרחב וקטורי V וקבוצה חלקית $B \subseteq V$. אז
$Sp(Sp(B)) = Sp(B)$

נכון לא נכון

נימוק קצר

5. 5 נקודות אם מטריצה A לכסינה אז גם $-A$ לכסינה

נכון לא נכון

נימוק קצר

6. 5 נקודות אם מטריצה A לכסינה אז היא גם הפיכה

נכון לא נכון

נימוק קצר

חלק ג

בחלק זה יש 5 שאלות בנות משקל 15 נקודות כ״א ואפשר לבחור 4 מ5 השאלות ולצבור 60 נקודות סה״כ

שאלה 7 15 נקודות.

נניח כי n הוא מספר טבעי ויהיו

$U = \{A \in M_{2n}(\mathbb{R}), \forall i, n \le i \le 2n, \forall j, n \le j \le i, A(i,j) = A(2n+1-i, 2n+1-j)\}$ ו-

$V = \{A \in M_{2n}(\mathbb{R}), \forall i, n \le i \le 2n, \forall j, n \le j \le i, A(i,j) = -A(2n+1-i, 2n+1-j)\}$

א. הוכח ש U,V.הם תתי-מרחבים של $M_{2n}(\mathbb{R})$.

ב. מצא את $\dim(U), \dim(W)$

ג. האם $M_{2n}(\mathbb{R})$ הוא הסכום של U ו V?

8. 15 נקודות מצא בסיסים של הסכום והחיתוך של שני תת-מרחבים $U \le \mathbf{R}^5$ ו $V \le \mathbf{R}^5$ כאשר

$U = Sp\{(4,0,2,0,4),(1,-1,1,-1,1),(1,0,1,0,1)\}$,

$V = Sp\{(4,1,2,2,5),(1,-2,1,1,1),(1,2,1,0,2)\}$

. השלם את הבסיס של $U+V$ לבסיס של $\mathbf{R}^5$.

9. 15 נקודות נתונה מטריצה ממשית

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & a+b & 5 \\ -6 & 7 & -8 & 9 & -10 \\ 11 & -12 & 13+c & -14 & b \end{pmatrix}$$

כאשר a,b,c הם פרמטרים ממשיים.

א. מצא את כל הערכים של a,b ,c, שעבורם הדרגה של A תהיה מינימלית.

ב. לכל הערכים של הפרמטרים שמצאת בחלק א' מצא בסיסים של מרחב העמודות $C(A)$ ושל מרחב השורות $S(A)$

10 . 15 נקודות נתון המ"ו $\mathbf{Z}_5^3$ מעל $\mathbf{Z}_5$ ונגדיר את $\overline{b}_1=(1,2,2),\overline{b}_2=(2,3,4)$. נסמן $B=\{\overline{b}_1,\overline{b}_2\}$

א. מצא משואה שמקיימים כל הוקטורים בתת המרחב $U=Sp\{\overline{b}_1,\overline{b}_2\}=SpB$

ב. הבט בהעתקה $f:\mathbf{Z}_5^3\to\mathbf{Z}_5^3$ המוגדרת על ידי $f(x,y,z)=(z,x,y)$ ומצא את המשואה שמקיים תת המרחב $V=f(U)$

ג. מצא בסיס C עבור V.

ד. השלם את B לבסיס B_1 של $\mathbf{Z}_5^3$.

ה. השלם את C לבסיס C_1 של $\mathbf{Z}_5^3$.

ו. מצא את מטריצת המעבר $[M]_{B_1}^{C_1}$

11. 15 נקודות נתונה מטריצה ממשית $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -1 \\ 16 & 8 & -11 & 2 \\ 6 & 4 & -1 & 0 \\ 12 & 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$.

א. חשב את הפולינום האופייני ואת הערכים העצמיים של A .

ב. מצא בסיסים של המרחבים העצמיים של A .

ג. מצא מטריצה המלכסנת T של A .

בהצלחה !

תשובות
תשובה 7

ו- $U=\{A\in M_{2n}(\mathbb{R}),\forall i,n\le i\le 2n,\forall j,n\le j\le i,A(i,j)=A(2n+1-i,2n+1-j)\}$
$V=\{A\in M_{2n}(\mathbb{R}),\forall i,n\le i\le 2n,\forall j,n\le j\le i,A(i,j)=-A(2n+1-i,2n+1-j)\}$

א1. ברור כי המטריצה שכולה 0 מקיימת את התנאי של U ולכן $U\neq\phi$. יהיו $K,L\in U,a,b\in\mathbb{R}$ ויהיו $i,n\le i\le 2n,j,n\le j\le i$ אז לפי ההגדרה $K(i,j)=K(2n+1-i,2n+1-j),L(i,j)=L(2n+1-i,2n+1-j)$ ונובע כי
$(aK+bL)(i,j)=aK(i,j)+bL(i,j)=aK(2n+1-i,2n+1-j)+bL(2n+1-i,2n+1-j)$
$=(aK+bL)(2n+1-i,2n+1-j)$
ולכן באמת U הוא תמ"ו.

א2. ברור כי המטריצה שכולה 0 מקיימת את התנאי של V ולכן $V\neq\phi$. יהיו $K,L\in V,a,b\in\mathbb{R}$ ויהיו $i,n\le i\le 2n,j,n\le j\le i$ אז לפי ההגדרה $K(i,j)=-K(2n+1-i,2n+1-j),L(i,j)=-L(2n+1-i,2n+1-j)$ ונובע כי
$(aK+bL)(i,j)=aK(i,j)+bL(i,j)=-aK(2n+1-i,2n+1-j)+-bL(2n+1-i,2n+1-j)$
$=-(aK+bL)(2n+1-i,2n+1-j)$
ולכן באמת V הוא תמ"ו.

הממד של U הוא $(2n)^2-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{8n^2-n(n+1)}{2}=\frac{7n^2-n}{2}=\frac{n(7n-1)}{2}$ ושל V הוא
כמו של U, ממד החיתוך הוא $(2n)^2-2\frac{n(n+1)}{2}=n(3n-1)$ ולכן לפי משפט הממד
$\dim(U+V)=\frac{n(7n-1)}{2}+\frac{n(7n-1)}{2}-n(3n-1)=n(7n-1)-n(3n-1)=4n^2$ ולכן הסכום הוא $M_{2n}(\mathbb{R})$

תשובה 8

. נעביר את U ואת V לצורה של משוואות:
. מצא בסיסים של הסכום והחיתוך של שני תת-מרחבים $U\le\mathbf{R}^5$ ו $V\le\mathbf{R}^5$ כאשר

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 0 & b \\ 2 & 1 & 1 & c \\ 0 & -1 & 0 & d \\ 4 & 1 & 1 & e \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & c \\ 0 & -1 & 0 & b \\ 2 & 0 & 0 & a-c \\ 0 & 0 & 0 & d-b \\ 0 & 0 & 0 & e-a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a-c \\ 0 & -1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & 2c-a \\ 0 & 0 & 0 & d-b \\ 0 & 0 & 0 & e-a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a-c \\ 0 & -1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 2c+b-a \\ 0 & 0 & 0 & d-b \\ 0 & 0 & 0 & e-a \end{pmatrix}$$

כלומר U הוא תת מרחב בעל ממד 3 המקיים את המשוואות $d=b,c=e$ ובצורה דומה

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & a \\ 1 & -2 & 2 & b \\ 2 & 1 & 1 & c \\ 2 & 1 & 0 & d \\ 5 & 1 & 2 & e \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a-c \\ 1 & -2 & 2 & b \\ 0 & 0 & 1 & c-d \\ 2 & 1 & 0 & d \\ 5 & 1 & 2 & e \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a-c \\ 1 & -2 & 2 & b \\ 0 & 0 & 1 & c-d \\ 0 & 1 & 0 & d-(a-c) \\ 5 & 1 & 2 & e \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a-c \\ 1 & -2 & 2 & b \\ 0 & 0 & 1 & c-d \\ 0 & 1 & 0 & d+c-a \\ 5 & 1 & 2 & e \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a-c \\ 1 & -2 & 0 & b-2(c-d) \\ 0 & 0 & 1 & c-d \\ 0 & 1 & 0 & d+c-a \\ 5 & 1 & 0 & e-2(c-d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a-c \\ 1 & -2 & 0 & b-2c+2d \\ 0 & 0 & 1 & c-d \\ 0 & 1 & 0 & d+c-a \\ 5 & 1 & 0 & e+2d-2c \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a-c \\ 1 & 0 & 0 & b-2c+2d+2(d+c-a) \\ 0 & 0 & 1 & c-d \\ 0 & 1 & 0 & d+c-a \\ 5 & 0 & 0 & e+2d-2c-(d+c-a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a-c \\ 1 & 0 & 0 & -2a+b+4d \\ 0 & 0 & 1 & c-d \\ 0 & 1 & 0 & d+c-a \\ 5 & 0 & 0 & a-3c+d+e \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a-c-2(-2a+b+4d) \\ 1 & 0 & 0 & -2a+b+4d \\ 0 & 0 & 1 & c-d \\ 0 & 1 & 0 & d+c-a \\ 5 & 0 & 0 & a-3c+d+e-5(-2a+b+4d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5a-2b-c-8d \\ 1 & 0 & 0 & -2a+b+4d \\ 0 & 0 & 1 & c-d \\ 0 & 1 & 0 & d+c-a \\ 0 & 0 & 0 & 11a-5b-3c-19d+e \end{pmatrix}$$

כלומר כלומר V הוא תת מרחב בעל ממד 3 המקיים את המשוואות
$5a=2b+c+8d,11a+e=5b+3c+19d$ ולכן ונקבל את משוואות החתוך :
$5a=2b+c+8d,11a+e=5b+3c+19d,a=e,b=d$ כלומר נקבל מערכת של משוואות עבור החיתוך

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 & -8 & 0 \\ 11 & -5 & -3 & -19 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & -8 & 5 \\ 0 & -5 & -3 & -19 & 12 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -24 & 12 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

כלומר $2b=2d=e=a, c=0$ ולכן $U \cap V = Sp\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ תמ״ו בעל ממד 1, ולכן

$U = Sp\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $V = Sp\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, והללו הם בסיסים. האחוד

שלהם הוא בסיס של V+U $U+V = \mathbf{R}^5 = Sp\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$,

תשובה 9.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & a+b & 5 \\ -6 & 7 & -8 & 9 & -10 \\ 11 & -12 & 13+c & -14 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & a+b & 5 \\ 0 & -5 & 10 & 9+6a+6b & 20 \\ 0 & 10 & -20+c & -14-11a-11b & b-55 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & a+b & 5 \\ 0 & -5 & 10 & 9+6a+6b & 20 \\ 0 & 0 & c & 4+a+b & b-15 \end{pmatrix}$$

ולכן הדרגה המינימלית היא כאשר a=-19,b=15,c=0. עבור הערכים הללו בסיס של C(A) הוא {(1,-6,11),(2,-7,12)}. ושל S(A) {(1,-2,3,-4,5),(0,-5,10,-15,20)}

תשובה 10

א. . נחשב את המשוואה של הוקטורים בתת המרחב.

$$\begin{pmatrix}1&2&a\\2&3&b\\2&4&c\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3+3S_1\to S_3]{S_2+3S_1\to S_2}\begin{pmatrix}1&2&a\\0&9&b+3a\\0&10&c+3a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&a\\0&4&b+2a\\0&0&c+3a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-3b\\0&2&b+2a\\0&0&c+3a\end{pmatrix}$$ ולכן

כפי שקל לודא , הוקטורים של Bמקיימים מעל $\mathbf{Z}_5$ את המשואה $c+3a=0$

ג. ההעתקה מחליפה בין הקואורדינטות ולכן ב V מתקיים $a+3b=0$.

ג. נבחר את C להיות התמונות של אברי B כלומר $C=\{\overline{c}_1,\overline{c}_2\}$

$\overline{c}_1=(2,1,2),\overline{c}_2=(4,2,3)$.

ד. נבחר את B_1 להיות $b_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix},b_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ נבדק שזהו בסיס על ידי זה

שנחשב את הדטרמיננט של המטריצה שעמודותיה B_1 ,

$$\det\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&0\\2&4&0\end{pmatrix}=1(2\cdot4-2\cdot3)=2\neq0$$ ולכן זהו בסיס של $\mathbf{Z}_5^3$

ה. נבחר את C_1 להיות $c_1=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},c_2=\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix},c_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ נבדק שזהו בסיס על ידי זה

שנחשב את הדטרמיננט של המטריצה שעמודותיה C_1 ,

$$\det\begin{pmatrix}2&4&0\\1&2&1\\2&3&0\end{pmatrix}=(-1)(2\cdot3-2\cdot4)=2\neq0$$ נבדק $c_1=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},c_2=\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix},c_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ואת

ו. מצא את מטריצת המעבר $[M]^{C_1}_{B_1},b_1=\alpha c_1+\beta c_2+\gamma c_3$

$$(C_1\quad B_1)=\begin{pmatrix}2&4&0&1&2&1\\1&2&1&2&3&0\\2&3&0&2&4&0\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3-S_1\to S_3]{S_2+2S_1\to S_2}\begin{pmatrix}2&4&0&1&2&1\\5&10&1&4&7&2\\0&-1&0&1&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&0&1&2&1\\0&0&1&4&2&2\\0&4&0&1&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow[S_2\leftrightarrow S_3]{S_1-S_3\to S_1}$$

$$\begin{pmatrix}2&0&0&0&0&-3\\0&4&0&1&2&4\\0&0&1&4&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[4S_2\to S_2]{3S_1\to S_1}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&1\\0&1&0&4&3&1\\0&0&1&4&2&2\end{pmatrix}$$

$$[M]^{C_1}_{B_1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\4&3&1\\4&2&2\end{pmatrix}$$

תשובה 11.

$$p=\det\begin{pmatrix}-1-x & 0 & 3 & -1\\ 16 & 8-x & -11 & 2\\ 6 & 4 & -1-x & 0\\ 12 & 6 & -9 & 4-x\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}-1-x & 0 & 3 & -1\\ 14-2x & 8-x & -5 & 0\\ 6 & 4 & -1-x & 0\\ 12 & 6 & -9 & 4-x\end{pmatrix}$$

$$=\det\begin{pmatrix}-1-x & 0 & 0 & -1\\ 14-2x & 8-x & -5 & 0\\ 6 & 4 & -1-x & 0\\ 12 & 6 & 3-3x & 4-x\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}-1-x & 0 & 0 & -1\\ -2 & 8-x & -5 & 0\\ -2 & 4 & -1-x & 0\\ 0 & 6 & 3-3x & 4-x\end{pmatrix}$$

$$=\det\begin{pmatrix}-1-x & 0 & 0 & -1\\ -2 & 8-x & -5 & 0\\ 0 & 4-x & x-4 & 0\\ 0 & 6 & 3-3x & 4-x\end{pmatrix}=(x-4)\det\begin{pmatrix}-1-x & 0 & 0 & -1\\ -2 & 8-x & -5 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 6 & 3-3x & 4-x\end{pmatrix}$$

$$=(x-4)\det\begin{pmatrix}-1-x & 0 & 0 & -1\\ -2 & 3-x & -5 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 9-3x & 3-3x & 4-x\end{pmatrix}=(x-4)(3-x)\det\begin{pmatrix}-1-x & 0 & 0 & -1\\ -2 & 1 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 3-3x & 4-x\end{pmatrix}$$

$$=(x-4)(3-x)\det\begin{pmatrix}-1-x & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 6 & 3 & 18-3x & 4-x\end{pmatrix}=(x-4)(3-x)[6-(4-x)(1+x)]=$$

$$=(x-4)(3-x)(x^2-3x+2)=-(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

לכן הע״ע העצמיים של A הם 1,2,3,4, נציב כל ע״ע במערכת ונמצא ו״ע הצמודים להם. עבור 1 נקבל

$$\begin{pmatrix}-1-x & 0 & 3 & -1\\ 16 & 8-x & -11 & 2\\ 6 & 4 & -1-x & 0\\ 12 & 6 & -9 & 4-x\end{pmatrix}\lambda=1\to\begin{pmatrix}-2 & 0 & 3 & -1\\ 16 & 7 & -11 & 2\\ 6 & 4 & -2 & 0\\ 12 & 6 & -9 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2 & 0 & 3 & -1\\ 12 & 7 & -5 & 0\\ 6 & 4 & -2 & 0\\ 6 & 6 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

פורש את המרחב

$$\to\begin{pmatrix}-2 & 0 & 3 & -1\\ 0 & -5 & -5 & 0\\ 0 & -2 & -2 & 0\\ 6 & 6 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\ -z\\ z\\ 2z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$$

הצמוד עבור 2 נקבל

$$\begin{pmatrix} -1-x & 0 & 3 & -1 \\ 16 & 8-x & -11 & 2 \\ 6 & 4 & -1-x & 0 \\ 12 & 6 & -9 & 4-x \end{pmatrix} \lambda = 2 \to \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & -1 \\ 16 & 6 & -11 & 2 \\ 6 & 4 & -3 & 0 \\ 12 & 6 & -9 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & -1 \\ 10 & 6 & -5 & 0 \\ 6 & 4 & -3 & 0 \\ 6 & 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

פורש את המרחב

$$\to \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & -1 \\ 10 & 6 & -5 & 0 \\ 6 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & -1 \\ 10 & 0 & -5 & 0 \\ 6 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -w \\ 0 \\ 0 \\ w \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הצמוד עבור 3 נקבל

פורש את המרחב

$$\begin{pmatrix} -1-x & 0 & 3 & -1 \\ 16 & 8-x & -11 & 2 \\ 6 & 4 & -1-x & 0 \\ 12 & 6 & -9 & 4-x \end{pmatrix} \lambda = 3 \to \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 & -1 \\ 16 & 5 & -11 & 2 \\ 6 & 4 & -4 & 0 \\ 12 & 6 & -9 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & -5 & 0 \\ 6 & 4 & -4 & 0 \\ 8 & 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & -5 & 0 \\ 6 & 4 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \\ 3z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

הצמוד עבור 4 נקבל

$$\begin{pmatrix} -1-x & 0 & 3 & -1 \\ 16 & 8-x & -11 & 2 \\ 6 & 4 & -1-x & 0 \\ 12 & 6 & -9 & 4-x \end{pmatrix} \lambda = 4 \to \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 & -1 \\ 16 & 4 & -11 & 2 \\ 6 & 4 & -5 & 0 \\ 12 & 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 & -1 \\ 6 & 4 & -5 & 0 \\ 6 & 4 & -5 & 0 \\ 12 & 6 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

פורש את המרחב

$$\to \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 & -1 \\ 6 & 4 & -5 & 0 \\ 12 & 6 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 & -1 \\ 6 & 4 & -5 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} x \\ x \\ -2x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הצמוד

מטריצה מלכסנת היא

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$