המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

<u>המחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב.</u> מבחן באלגברה ליניארית ב, יום שלישי כז אדר התשפ"ג 20.03.2023 סמסטר א', מועד ב'.
מורה: גיורא דולה. משך המבחן: 3 שעות
אפשר להשתמש רק במחשבון כיס. יש לכתוב כל התשובות במחברת.

המבחן כולל 3 חלקים: בחלק א אין בחירה ויש רק שאלה אחת ללא בחירה. משקל התשובה 20 נקודות
בחלק ב יש 5 שאלות שהתשובה לכל אחת היא כן או לא ונימוק קצר. ניחוש נכון ללא נימוק יזכה במעט נקודות. משקל כל תשובה 5 נקודות ואפשר לבחור 4 מתוך 5 השאלות.
בחלק ג זה יש 5 שאלות בנות משקל 15 נקודות כ"א ואפשר לבחור 4 מ5 השאלות ולצבור 60 נקודות סה"כ.

סה"כ 60+20+20=100

בהצלחה

חלק א בחלק זה אין בחירה ויש רק שאלה אחת ללא בחירה. משקל התשובה 20 נקודות.

1. 20 נקודות .הוכח כי לכל מטריצה A ממד מרחב השורות שוה לממד מרחב העמודות. יש לנסח ולהוכיח את כל טענות העזר.

חלק ב בחלק זה יש 5 שאלות שהתשובה לכל אחת היא כן או לא ונימוק קצר. ניחוש נכון ללא נימוק יזכה במעט נקודות. משקל כל תשובה 5 נקודות ואפשר לבחור 4 מתוך 5 השאלות.

2. 5 נקודות נתונים מרחב וקטורי V ותתי מרחב $U,W \subseteq V$ מעל שדה הממשיים אז יתכן כי $U \cap W$ היא קבוצה סופית.

נכון לא נכון

נימוק קצר

3. 5 נקודות נתונים מרחב וקטורי V תתי מרחב $U,W \subseteq V$ ובסיסים B_1 עבור U ו B_2 עבור W אז $B_1 \cap B_2$ בסיס עבור $U \cap W$.

נכון לא נכון

נימוק קצר

4. 5 נקודות . נתונים מרחב וקטורי V וקבוצה סופית S הפורשת את V כלומר $Sp(S)=V$ נסמן ב B בסיס המתקבל כקבוצה חלקית של S . נתון שהשדה הוא שדה הממשיים אז אוסף ה B האפשריים הוא סופי.

.

נכון   לא נכון

נימוק קצר

5. 5 נקודות אם מטריצות A,B אינן לכסינות אז גם המכפלה AB איננה לכסינה

נכון   לא נכון

נימוק קצר

6. 5 נקודות נתונות מטריצות A,B בעלות פולינומים אפיניים p,q אז הפולינום האפיני של $A+B$ שווה ל - $p+q$

נכון   לא נכון

נימוק קצר

חלק ג
בחלק זה יש 5 שאלות בנות משקל 15 נקודות כ"א ואפשר לבחור 4 מ5 השאלות ולצבור 60 נקודות סה"כ

שאלה 7 15 נקודות.
נניח כי n הוא מספר זוגי ויהיו

$U=\{A\in M_{2n}(\mathbb{R}),\forall i,1\le i\le 2n,\forall j,1\le j\le i,A(i,j)=A(2n+1-i,2n+1-j)\}$ ו-

$V=\{A\in M_{2n}(\mathbb{R}),\forall i,1\le i\le 2n,\forall j,1\le j\le i,,A(i,j)=-A(2n+1-i,2n+1-j)\}$

א. הוכח ש U,V.הם תתי-מרחבים של $M_{2n}(\mathbb{R})$.

ב. מצא את $\dim(U),\dim(W)$

ג. האם $M_{2n}(\mathbb{R})$ הוא הסכום של U ו V?

8. 15 נקודות מצא בסיסים של הסכום והחיתוך של שני תת-מרחבים $U\le\mathbf{R}^5$ ו $V\le\mathbf{R}^5$ כאשר

$U=Sp\{(4,0,2,-2,0),(1,-1,1,-1,1),(1,0,1,0,1)\}$,

$V=Sp\{(4,1,2,0,1),(1,-2,1,1,1),(1,2,1,0,2)\}$

. השלם את הבסיס של $U+V$ לבסיס של $\mathbf{R}^5$.

9. 15 נקודות נתונה מטריצה ממשית

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & a+b & 5\\ -6 & 7 & -8 & 9 & -10\\ 11 & -12 & 14+c & -14 & b\end{pmatrix}$$

כאשר a,b הם פרמטרים ממשיים.

א. מצא את כל הערכים של c,a,b, שעבורם הדרגה של A תהיה מינימלית.

ב. לכל הערכים של הפרמטרים שמצאת בחלק א' מצא בסיסים של מרחב העמודות $C(A)$ ושל מרחב השורות $S(A)$

10 . 15 נקודות נתון המ"ו $\mathbf{Z}_5^3$ מעל $\mathbf{Z}_5$ ונגדיר את $\overline{b}_1=(1,2,2),\overline{b}_2=(2,3,4)$. נסמן $B=\{\overline{b}_1,\overline{b}_2\}$

א. מצא משואה שמקיימים כל הוקטורים בתת המרחב $U=Sp\{\overline{b}_1,\overline{b}_2\}=SpB$

ב. הבט בהעתקה $f:\mathbf{Z}_5^3\to\mathbf{Z}_5^3$ המוגדרת על ידי $f(x,y,z)=(z,y,x)$ ומצא את המשואה שמקיים תת המרחב $V=f(U)$

ג. מצא בסיס C עבור V.

ד. השלם את B לבסיס B_1 של $\mathbf{Z}_5^3$.

ה. השלם את C לבסיס C_1 של $\mathbf{Z}_5^3$.

ו. מצא את מטריצת המעבר $[M]^{C_1}_{B_1}$

11. 15 נקודות נתונה מטריצה ממשית $A=\begin{pmatrix}8 & 16 & -11 & 2\\ 0 & -1 & 3 & -1\\ 4 & 6 & -1 & 0\\ 6 & 12 & -9 & 4\end{pmatrix}$.

א. חשב את הפולינום האופייני ואת הערכים העצמיים של A .

ב. מצא בסיסים של המרחבים העצמיים של A .

ג. מצא מטריצה המלכסנת T של A .

בהצלחה !

תשובות

תשובה 2

נכון אם $U\cap W=\{0\}$. (בלי תלות בשדה).

תשובה 3

לא להלן דוגמא $U=W=U\cap W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix},x,y\in\mathbb{R}\right\}$ וגם

$$B_1=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\},B_2=\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right\},B_1\cap B_2=\phi$$

תשובה 4

נכון, הבסיס מורכב מקבוצה חלקית של הקבוצה הפורשת. כיון שהקבוצה הפורשת היא סופית, מספר הקבוצות החלקיות שלה הוא סופי.

תשובה 5 . לא נכון מצורפת דוגמא של שתי מטריצות אינן לכסינות אבל מכפלתן אלכסונית ולכן לכסינה.

$$A=\begin{pmatrix}5&-1\\0&5\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}5&1\\0&5\end{pmatrix},AB=\begin{pmatrix}25&0\\0&25\end{pmatrix}.$$

תשובה 6 . לא נכון מצורפת דוגמא של שתי מטריצות עם הפולינומים האפיניים

$$A=B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},A+B=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix},p=q=(x-1)^2,p_{A+B}=(x-2)^2\neq(x-1)^2+(x-1)^2.$$

תשובה 7

$U = \{A \in M_{2n}(\mathbb{R}), \forall i, 1 \le i \le 2n, \forall j, 1 \le j \le i, A(i,j) = A(2n+1-i, 2n+1-j)\}$ ו-
$V = \{A \in M_{2n}(\mathbb{R}), \forall i, 1 \le i \le 2n, \forall j, 1 \le j \le i,, A(i,j) = -A(2n+1-i, 2n+1-j)\}$

א1. ברור כי המטריצה שכולה 0 מקיימת את התנאי של U ולכן $U \ne \phi$. יהיו
$K, L \in U, a, b \in \mathbb{R}$ ויהיו $i, 1 \le i \le 2n, j, 1 \le j \le i$ אז לפי ההגדרה
$K(i,j) = K(2n+1-i, 2n+1-j), L(i,j) = L(2n+1-i, 2n+1-j)$ ונובע כי
$(aK+bL)(i,j) = aK(i,j) + bL(i,j) = aK(2n+1-i, 2n+1-j) + bL(2n+1-i, 2n+1-j)$
$= (aK+bL)(2n+1-i, 2n+1-j)$
ולכן באמת U הוא תמ״ו.

א2.ברור כי המטריצה שכולה 0 מקיימת את התנאי של V ולכן $V \ne \phi$. יהיו
$K, L \in V, a, b \in \mathbb{R}$ ויהיו $i, 1 \le i \le 2n, j, 1 \le j \le i$ אז לפי ההגדרה
$K(i,j) = -K(2n+1-i, 2n+1-j), L(i,j) = -L(2n+1-i, 2n+1-j)$ ונובע כי
$(aK+bL)(i,j) = aK(i,j) + bL(i,j) = -aK(2n+1-i, 2n+1-j) + -bL(2n+1-i, 2n+1-j)$
$= -(aK+bL)(2n+1-i, 2n+1-j)$
ולכן באמת V הוא תמ״ו.
הממד של U הוא $\frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1)$ ושל V הוא כמו של U, ממד החיתוך הוא n
ולכן לפי משפט הממד $\dim(U+V) = 2n(n+1) - 2n = 4n^2$ ולכן הסכום הוא $M_{2n}(\mathbb{R})$

תשובה 8

. נעביר את U ואת V לצורה של משוואות:
. מצא בסיסים של הסכום והחיתוך של שני תת-מרחבים $U \le \mathbf{R}^5$ ו $V \le \mathbf{R}^5$ כאשר

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 0 & b \\ 2 & 1 & 1 & c \\ 0 & -1 & 0 & d \\ 4 & 1 & 1 & e \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & c \\ 0 & -1 & 0 & b \\ 2 & 0 & 0 & a-c \\ 0 & 0 & 0 & d-b \\ 0 & 0 & 0 & e-a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a-c \\ 0 & -1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & 2c-a \\ 0 & 0 & 0 & d-b \\ 0 & 0 & 0 & e-a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a-c \\ 0 & -1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 2c+b-a \\ 0 & 0 & 0 & d-b \\ 0 & 0 & 0 & e-a \end{pmatrix}$$

כלומר U הוא תת מרחב בעל ממד 3 המקיים את המשוואות $d = b, c = e$ ובצורה
דומה

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & a \\ 1 & -2 & 2 & b \\ 2 & 1 & 1 & c \\ 2 & 1 & 0 & d \\ 5 & 1 & 2 & e \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a-c \\ 1 & -2 & 2 & b \\ 0 & 0 & 1 & c-d \\ 2 & 1 & 0 & d \\ 5 & 1 & 2 & e \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a-c \\ 1 & -2 & 2 & b \\ 0 & 0 & 1 & c-d \\ 0 & 1 & 0 & d-(a-c) \\ 5 & 1 & 2 & e \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a-c \\ 1 & -2 & 2 & b \\ 0 & 0 & 1 & c-d \\ 0 & 1 & 0 & d+c-a \\ 5 & 1 & 2 & e \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a-c \\ 1 & -2 & 0 & b-2(c-d) \\ 0 & 0 & 1 & c-d \\ 0 & 1 & 0 & d+c-a \\ 5 & 1 & 0 & e-2(c-d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a-c \\ 1 & -2 & 0 & b-2c+2d \\ 0 & 0 & 1 & c-d \\ 0 & 1 & 0 & d+c-a \\ 5 & 1 & 0 & e+2d-2c \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a-c \\ 1 & 0 & 0 & b-2c+2d+2(d+c-a) \\ 0 & 0 & 1 & c-d \\ 0 & 1 & 0 & d+c-a \\ 5 & 0 & 0 & e+2d-2c-(d+c-a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a-c \\ 1 & 0 & 0 & -2a+b+4d \\ 0 & 0 & 1 & c-d \\ 0 & 1 & 0 & d+c-a \\ 5 & 0 & 0 & a-3c+d+e \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a-c-2(-2a+b+4d) \\ 1 & 0 & 0 & -2a+b+4d \\ 0 & 0 & 1 & c-d \\ 0 & 1 & 0 & d+c-a \\ 5 & 0 & 0 & a-3c+d+e-5(-2a+b+4d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5a-2b-c-8d \\ 1 & 0 & 0 & -2a+b+4d \\ 0 & 0 & 1 & c-d \\ 0 & 1 & 0 & d+c-a \\ 0 & 0 & 0 & 11a-5b-3c-19d+e \end{pmatrix}$$

כלומר כלומר V הוא תת מרחב בעל ממד 3 המקיים את המשוואות
$5a=2b+c+8d, 11a+e=5b+3c+19d$ ולכן ונקבל את משוואות החתוך :
$5a=2b+c+8d, 11a+e=5b+3c+19d, a=e, b=d$ כלומר נקבל מערכת של משוואות עבור החיתוך

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 & -8 & 0 \\ 11 & -5 & -3 & -19 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & -8 & 5 \\ 0 & -5 & -3 & -19 & 12 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -24 & 12 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

כלומר $2b=2d=e=a, c=0$ ולכן $U\cap V=Sp\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$ תמ״ו בעל ממד 1, ולכן

$U=Sp\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, $V=Sp\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$, והללו הם בסיסים. האחוד

שלהם הוא בסיס של V+U $U+V=\mathbf{R}^5=Sp\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$,

תשובה 9.

$$\begin{pmatrix}1&-2&3&a+b&5\\-6&7&-8&9&-10\\11&-12&13+c&-14&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&a+b&5\\0&-5&10&9+6a+6b&20\\0&10&-20+c&-14-11a-11b&b-55\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&a+b&5\\0&-5&10&9+6a+6b&20\\0&0&c&4+a+b&b-15\end{pmatrix}$$

ולכן הדרגה המינימלית היא כאשר .a=-19,b=15,c=0. עבור הערכים הללו בסיס של C(A) הוא {(1,-6,11),(2,-7,12)} }.ושל S(A) {(1,-2,3,-4,5),(0,-5,10,-15,20)}

תשובה 10

א. . נחשב את המשואה של הוקטורים בתת המרחב.

$$\begin{pmatrix}1&2&a\\2&3&b\\2&4&c\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3+3S_1\to S_3]{S_2+3S_1\to S_2}\begin{pmatrix}1&2&a\\0&9&b+3a\\0&10&c+3a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&a\\0&4&b+2a\\0&0&c+3a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-3b\\0&2&b+2a\\0&0&c+3a\end{pmatrix}$$ ולכן

כפי שקל לודא , הוקטורים של Bמקיימים מעל $\mathbf{Z}_5$ את המשואה $c+3a=0$

ג. ההעתקה מחליפה בין הקואורדינטות ולכן ב V מתקיים $a+3b=0$.

ג. נבחר את C להיות התמונות של אברי B כלומר $C=\{\overline{c}_1,\overline{c}_2\}$

$\overline{c}_1=(2,2,1),\overline{c}_2=(4,3,2)$.

ד. נבחר את B_1 להיות $b_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, b_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, b_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ נבדק שזהו בסיס על ידי זה שנחשב את הדטרמיננט של המטריצה שעמודותיה B_1 ,

$\det\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&0\\2&4&0\end{pmatrix}=1(2\cdot4-2\cdot3)=2\neq0$ ולכן זהו בסיס של $\mathbf{Z}_5^3$

ה. נבחר את C_1 להיות $c_1=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}, c_2=\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}, c_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ נבדק שזהו בסיס על ידי זה שנחשב את הדטרמיננט של המטריצה שעמודותיה C_1 ,

$\det\begin{pmatrix}2&4&0\\2&3&0\\1&2&1\end{pmatrix}=1\cdot(2\cdot3-2\cdot4)=-2\neq0$ נבדק $c_1=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}, c_2=\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}, c_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ואת

ו. מצא את מטריצת המעבר $b_1=\alpha c_1+\beta c_2+\gamma c_3$, $[M]^{C_1}{}_{B_1}$

$$\left(C_1\quad B_1\right)=\begin{pmatrix}2&4&0&1&2&1\\2&3&0&2&3&0\\1&2&1&2&4&0\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3+2S_1\to S_3]{S_2-S_1\to S_2}\begin{pmatrix}2&4&0&1&2&1\\0&-1&0&1&1&-1\\5&10&1&4&8&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&0&1&2&1\\0&4&0&1&1&4\\0&0&1&4&3&2\end{pmatrix}\xrightarrow[4S_2\to S_2]{S_1-S_2\to S_1}$$

$$\begin{pmatrix}2&0&0&0&1&2\\0&1&0&4&4&1\\0&0&1&4&3&2\end{pmatrix}\xrightarrow{3S_1\to S}\begin{pmatrix}1&0&0&0&2&1\\0&1&0&4&4&1\\0&0&1&4&3&2\end{pmatrix}$$

$$[M]^{C_1}{}_{B_1}=\begin{pmatrix}0&2&1\\4&4&1\\4&3&2\end{pmatrix}$$

תשובה 11.

$$p=\det\begin{pmatrix}-1-x&0&3&-1\\16&8-x&-11&2\\6&4&-1-x&0\\12&6&-9&4-x\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}-1-x&0&3&-1\\14-2x&8-x&-5&0\\6&4&-1-x&0\\12&6&-9&4-x\end{pmatrix}$$

$$=\det\begin{pmatrix}-1-x&0&0&-1\\14-2x&8-x&-5&0\\6&4&-1-x&0\\12&6&3-3x&4-x\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}-1-x&0&0&-1\\-2&8-x&-5&0\\-2&4&-1-x&0\\0&6&3-3x&4-x\end{pmatrix}$$

$$=\det\begin{pmatrix}-1-x&0&0&-1\\-2&8-x&-5&0\\0&4-x&x-4&0\\0&6&3-3x&4-x\end{pmatrix}=(x-4)\det\begin{pmatrix}-1-x&0&0&-1\\-2&8-x&-5&0\\0&-1&1&0\\0&6&3-3x&4-x\end{pmatrix}$$

$$=(x-4)\det\begin{pmatrix}-1-x&0&0&-1\\-2&3-x&-5&0\\0&0&1&0\\0&9-3x&3-3x&4-x\end{pmatrix}=(x-4)(3-x)\det\begin{pmatrix}-1-x&0&0&-1\\-2&1&-5&0\\0&0&1&0\\0&3&3-3x&4-x\end{pmatrix}$$

$$=(x-4)(3-x)\det\begin{pmatrix}-1-x&0&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\6&3&18-3x&4-x\end{pmatrix}=(x-4)(3-x)[6-(4-x)(1+x)]=$$

$$=(x-4)(3-x)(x^2-3x+2)=-(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

לכן הע״ע העצמיים של A הם 1,2,3,4,נציב כל ע״ע במערכת ונמצא ו״ע הצמודים להם. עבור 1 נקבל

$$\begin{pmatrix}-1-x&0&3&-1\\16&8-x&-11&2\\6&4&-1-x&0\\12&6&-9&4-x\end{pmatrix}\lambda=1\rightarrow\begin{pmatrix}-2&0&3&-1\\16&7&-11&2\\6&4&-2&0\\12&6&-9&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-2&0&3&-1\\12&7&-5&0\\6&4&-2&0\\6&6&0&0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}-2&0&3&-1\\0&-5&-5&0\\0&-2&-2&0\\6&6&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-2&0&3&-1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\-2&0&3&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&2&3&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

פורש את המרחב

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&0\\0&0&2&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\-z\\z\\2z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

הצמוד עבור 2 נקבל

$$\begin{pmatrix} -1-x & 0 & 3 & -1 \\ 16 & 8-x & -11 & 2 \\ 6 & 4 & -1-x & 0 \\ 12 & 6 & -9 & 4-x \end{pmatrix} \lambda = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & -1 \\ 16 & 6 & -11 & 2 \\ 6 & 4 & -3 & 0 \\ 12 & 6 & -9 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & -1 \\ 10 & 6 & -5 & 0 \\ 6 & 4 & -3 & 0 \\ 6 & 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

פורש את המרחב

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & -1 \\ 10 & 6 & -5 & 0 \\ 6 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & -1 \\ 10 & 0 & -5 & 0 \\ 6 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -w \\ 0 \\ 0 \\ w \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הצמוד עבור 3 נקבל

פורש את המרחב

$$\begin{pmatrix} -1-x & 0 & 3 & -1 \\ 16 & 8-x & -11 & 2 \\ 6 & 4 & -1-x & 0 \\ 12 & 6 & -9 & 4-x \end{pmatrix} \lambda = 3 \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 & -1 \\ 16 & 5 & -11 & 2 \\ 6 & 4 & -4 & 0 \\ 12 & 6 & -9 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & -5 & 0 \\ 6 & 4 & -4 & 0 \\ 8 & 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & -5 & 0 \\ 6 & 4 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \\ 3z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

הצמוד עבור 4 נקבל

$$\begin{pmatrix} -1-x & 0 & 3 & -1 \\ 16 & 8-x & -11 & 2 \\ 6 & 4 & -1-x & 0 \\ 12 & 6 & -9 & 4-x \end{pmatrix} \lambda = 4 \rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 & -1 \\ 16 & 4 & -11 & 2 \\ 6 & 4 & -5 & 0 \\ 12 & 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 & -1 \\ 6 & 4 & -5 & 0 \\ 6 & 4 & -5 & 0 \\ 12 & 6 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

פורש את המרחב

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 & -1 \\ 6 & 4 & -5 & 0 \\ 12 & 6 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 & -1 \\ 6 & 4 & -5 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x \\ x \\ -2x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הצמוד

מטריצה מלכסנת היא

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$