



**המחלקה למתמטיקה ומדעי מחשב. מבחן באלגברה ליניארית ב, יום חמישי כ
איר התשפ"ג 11.05.2023 סמסטר א', מועד ג'.
מורה: גיורא דולה. משך המבחן: 3 שעות
אפשר להשתמש רק במחשבון כיס. יש לכתוב כל התשובות במחברת.**

המבחן כולל 3 חלקים: בחלק א אין בחירה ויש רק שאלה אחת ללא בחירה. משקל
התשובה 20 נקודות
בחלק ב יש 5 שאלות שהתשובה לכל אחת היא כן או לא ונימוק קצר. ניחוש נכון
ללא נימוק יזכה במעט נקודות. משקל כל תשובה 5 נקודות ואפשר לבחור 4 מתוך 5
השאלות.
בחלק ג זה יש 5 שאלות בנות משקל 15 נקודות כ"א ואפשר לבחור 4 מ 5
השאלות ולצבור 60 נקודות סה"כ.

$$\text{סה"כ } 100 = 20 + 20 + 60$$

בהצלחה

חלק א בחלק זה אין בחירה ויש רק שתי שאלות . משקל כל תשובה 10 נקודות.
 1. 1א. 10 נקודות הוכח כי לשתי מטריצות דומות יש אותו פולינום אפייני
 1.1 ב. 10 נקודות הוכח כי ממד מרחב הפתרון + ממד מרחב השורות שווה
 למספר העמודות במטריצה

ככל שתפרט יותר הציון יגדל

חלק ב בחלק זה יש 5 שאלות שהתשובה לכל אחת היא כן או לא ונימוק קצר.
 ניחוש נכון ללא נימוק יזכה במעט נקודות. משקל כל תשובה 5 נקודות ואפשר
 לבחור 4 מתוך 5 השאלות.

2. 5 נקודות נתונים מרחב וקטורי V ותתי מרחב $U, W \subseteq V$ מעל שדה מודולו
 11 אז יתכן כי $U+W$ היא קבוצה אינסופית.

לא נכון

נכון

נימוק קצר

3. 5 נקודות נתונים מרחב וקטורי V תתי מרחב $U, W \subseteq V$ ובסיסים B_1 עבור
 U ו B_2 עבור W אז $B_1 \cap B_2$ בסיס עבור $U \cap W$.

לא נכון

נכון

נימוק קצר

4. 5 נקודות. נתונים מרחב וקטורי V וקבוצה סופית S הפורשת את V כלומר $Sp(S) = V$ נסמן ב B בסיס המתקבל כקבוצה חלקית של S . נתון שהשדה הוא שדה הממשיים אז אוסף ה B האפשריים הוא סופי.

נכון
לא נכון

נימוק קצר

5. 5 נקודות אם מטריצות A, B אינן לכסינות אז גם הסכום $A+B$ איננה לכסינה

נכון
לא נכון

נימוק קצר

6. 5 נקודות נתונות מטריצות A, B בעלות פולינומים אפיניים p, q . נגדיר את המטריצה המורחבת $A*B$ על ידי $A*B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ כאשר A ו B נמצאות על האלכסון ו 0 מיצגת מטריצת 0 . אז הפולינום האפיני של $A*B$ שווה ל $p*q$

נכון
לא נכון

נימוק קצר

חלק ג

בחלק זה יש 5 שאלות בנות משקל 15 נקודות כ"א ואפשר לבחור 4 מ 5 השאלות ולצבור 60 נקודות סה"כ

שאלה 7 15 נקודות.

נניח כי n הוא מספר זוגי ויהיו

$$U = \{A \in M_{2n}(\mathbf{R}), \forall i, 1 \leq i \leq 2n, \forall j, 1 \leq j \leq i, A(i, j) = A(2n+1-i, 2n+1-j)\}$$

$$V = \{A \in M_{2n}(\mathbf{R}), \forall i, 1 \leq i \leq 2n, \forall j, 1 \leq j \leq i, A(i, j) = -A(2n+1-i, 2n+1-j)\}$$

א. הוכח ש U, V הם תתי-מרחבים של $M_{2n}(\mathbf{R})$.

ב. מצא את $\dim(U), \dim(W)$

ג. האם $M_{2n}(\mathbf{R})$ הוא הסכום של U ו V ?

8.15 נקודות מצא בסיסים של הסכום והחיתוך של שני תת-מרחבים $U \leq \mathbb{R}^5$ ו $V \leq \mathbb{R}^5$ כאשר

$$U = \text{Sp}\{(4, 0, 2, 0, 4), (1, -1, 1, -1, 1), (1, 0, 1, 0, 1)\},$$

$$V = \text{Sp}\{(4, 1, 2, 2, 5), (1, -2, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 0, 2)\}$$

. השלם את הבסיס של $U+V$ לבסיס של \mathbb{R}^5 .

9.15 נקודות נתונה מטריצה ממשית

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & a+b & 5 \\ -6 & 7 & -8 & 9 & -10 \\ 11 & -12 & 14+c & -14 & b \end{pmatrix}$$

כאשר a, b הם פרמטרים ממשיים.
 א. מצא את כל הערכים של c, a, b , שעבורם הדרגה של A תהיה מינימלית.
 ב. לכל הערכים של הפרמטרים שמצאת בחלק א' מצא בסיסים של מרחב העמודות $C(A)$ ושל מרחב השורות $S(A)$

10.15 נקודות נתון המ"ו \mathbb{Z}_5^3 מעל \mathbb{Z}_5 ונגדיר את $\bar{b}_1 = (1, 2, 2), \bar{b}_2 = (2, 3, 4)$. נסמן $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2\}$

א. מצא משואה שמקיימים כל הוקטורים בתת המרחב $U = \text{Sp}\{\bar{b}_1, \bar{b}_2\} = \text{Sp}B$
 ב. הבט בהעתקה $f: \mathbb{Z}_5^3 \rightarrow \mathbb{Z}_5^3$ המוגדרת על ידי $f(x, y, z) = (z, x, y)$ ומצא את המשואה שמקיים תת המרחב $V = f(U)$
 ג. מצא בסיס C עבור V .
 ד. השלם את B לבסיס B_1 של \mathbb{Z}_5^3 .
 ה. השלם את C לבסיס C_1 של \mathbb{Z}_5^3 .
 ו. מצא את מטריצת המעבר $[M]_{B_1}^{C_1}$

11.15 נקודות נתונה מטריצה ממשית

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 16 & -11 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -1 & 0 \\ 6 & 12 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

א. חשב את הפולינום האופייני ואת הערכים העצמיים של A .
 ב. מצא בסיסים של המרחבים העצמיים של A .
 ג. מצא מטריצה המלכסנת T של A .

בהצלחה !

תשובות

תשובה 2

לא נכון אם כל מרחב וקטורי (בעל ממד סופי) מעל שדה סופי מכיל מספר סופי של איברים.

תשובה 3

לא להלן דוגמא וגם $U = W = U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, x, y \in \mathbf{R} \right\}$

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, B_1 \cap B_2 = \emptyset$$

תשובה 4

נכון, הבסיס מורכב מקבוצה חלקית של הקבוצה הפורשת. כיון שהקבוצה הפורשת היא סופית, מספר הקבוצות החלקיות שלה הוא סופי.

תשובה 5. לא נכון מצורפת דוגמא של שתי מטריצות שאינן לכסינות אבל סכומן אלכסונית ולכן לכסינה.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, A+B = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

תשובה 6. נכון אם מפתחים את $\det(\lambda I - A^* B)$. הפתוח של השורות העליונות נותן את הפולינום האפיני של A . ושל השורות האחרונות את הפולינום האפיני של B .

תשובה 7

$$\rightarrow U = \{A \in M_{2n}(\mathbf{R}), \forall i, 1 \leq i \leq 2n, \forall j, 1 \leq j \leq i, A(i, j) = A(2n+1-i, 2n+1-j)\}$$

$$V = \{A \in M_{2n}(\mathbf{R}), \forall i, 1 \leq i \leq 2n, \forall j, 1 \leq j \leq i, A(i, j) = -A(2n+1-i, 2n+1-j)\}$$

א1. ברור כי המטריצה שכולה 0 מקיימת את התנאי של U ולכן $U \neq \emptyset$. יהיו $K, L \in U, a, b \in \mathbf{R}$ ויהיו $i, 1 \leq i \leq 2n, j, 1 \leq j \leq i$ אז לפי ההגדרה ונובע כי $K(i, j) = K(2n+1-i, 2n+1-j), L(i, j) = L(2n+1-i, 2n+1-j)$
 $(aK + bL)(i, j) = aK(i, j) + bL(i, j) = aK(2n+1-i, 2n+1-j) + bL(2n+1-i, 2n+1-j)$
 $= (aK + bL)(2n+1-i, 2n+1-j)$
 ולכן באמת U הוא תמ"ו.

א2. ברור כי המטריצה שכולה 0 מקיימת את התנאי של V ולכן $V \neq \emptyset$. יהיו $K, L \in V, a, b \in \mathbf{R}$ ויהיו $i, 1 \leq i \leq 2n, j, 1 \leq j \leq i$ אז לפי ההגדרה ונובע כי $K(i, j) = -K(2n+1-i, 2n+1-j), L(i, j) = -L(2n+1-i, 2n+1-j)$
 $(aK + bL)(i, j) = aK(i, j) + bL(i, j) = -aK(2n+1-i, 2n+1-j) - bL(2n+1-i, 2n+1-j)$
 $= -(aK + bL)(2n+1-i, 2n+1-j)$
 ולכן באמת V הוא תמ"ו.

הממד של U הוא $\frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1)$ ושל V הוא כמו של U, ממד החיתוך הוא n

ולכן לפי משפט הממד $\dim(U + V) = 2n(n+1) - 2n = 4n^2$ ולכן הסכום הוא $M_{2n}(\mathbf{R})$

תשובה 8

. נעביר את U ואת V לצורה של משואות:
 מצא בסיסים של הסכום והחיתוך של שני תת-מרחבים $U \leq \mathbf{R}^5$ ו $V \leq \mathbf{R}^5$ כאשר

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 0 & b \\ 2 & 1 & 1 & c \\ 0 & -1 & 0 & d \\ 4 & 1 & 1 & e \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & c \\ 0 & -1 & 0 & b \\ 2 & 0 & 0 & a-c \\ 0 & 0 & 0 & d-b \\ 0 & 0 & 0 & e-a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a-c \\ 0 & -1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & 2c-a \\ 0 & 0 & 0 & d-b \\ 0 & 0 & 0 & e-a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a-c \\ 0 & -1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 2c+b-a \\ 0 & 0 & 0 & d-b \\ 0 & 0 & 0 & e-a \end{pmatrix}$$

כלומר U הוא תת מרחב בעל ממד 3 המקיים את המשואות $d = b, c = e$ ובצורה דומה

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & a \\ 1 & -2 & 2 & b \\ 2 & 1 & 1 & c \\ 2 & 1 & 0 & d \\ 5 & 1 & 2 & e \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a-c \\ 1 & -2 & 2 & b \\ 0 & 0 & 1 & c-d \\ 2 & 1 & 0 & d \\ 5 & 1 & 2 & e \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a-c \\ 1 & -2 & 2 & b \\ 0 & 0 & 1 & c-d \\ 0 & 1 & 0 & d-(a-c) \\ 5 & 1 & 2 & e \end{pmatrix} \\
= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a-c \\ 1 & -2 & 2 & b \\ 0 & 0 & 1 & c-d \\ 0 & 1 & 0 & d+c-a \\ 5 & 1 & 2 & e \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a-c \\ 1 & -2 & 0 & b-2(c-d) \\ 0 & 0 & 1 & c-d \\ 0 & 1 & 0 & d+c-a \\ 5 & 1 & 0 & e-2(c-d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a-c \\ 1 & -2 & 0 & b-2c+2d \\ 0 & 0 & 1 & c-d \\ 0 & 1 & 0 & d+c-a \\ 5 & 1 & 0 & e+2d-2c \end{pmatrix} \\
\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a-c \\ 1 & 0 & 0 & b-2c+2d+2(d+c-a) \\ 0 & 0 & 1 & c-d \\ 0 & 1 & 0 & d+c-a \\ 5 & 0 & 0 & e+2d-2c-(d+c-a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a-c \\ 1 & 0 & 0 & -2a+b+4d \\ 0 & 0 & 1 & c-d \\ 0 & 1 & 0 & d+c-a \\ 5 & 0 & 0 & a-3c+d+e \end{pmatrix} \rightarrow \\
\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a-c-2(-2a+b+4d) \\ 1 & 0 & 0 & -2a+b+4d \\ 0 & 0 & 1 & c-d \\ 0 & 1 & 0 & d+c-a \\ 5 & 0 & 0 & a-3c+d+e-5(-2a+b+4d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5a-2b-c-8d \\ 1 & 0 & 0 & -2a+b+4d \\ 0 & 0 & 1 & c-d \\ 0 & 1 & 0 & d+c-a \\ 0 & 0 & 0 & 11a-5b-3c-19d+e \end{pmatrix}$$

כלומר כלומר V הוא תת מרחב בעל ממד 3 המקיים את המשוואות
 $5a = 2b + c + 8d, 11a + e = 5b + 3c + 19d$
: החתוך ונקבל את משוואות החתוך:
 $5a = 2b + c + 8d, 11a + e = 5b + 3c + 19d, a = e, b = d$

עבור החיתוך

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 & -8 & 0 \\ 11 & -5 & -3 & -19 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & -8 & 5 \\ 0 & -5 & -3 & -19 & 12 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -24 & 12 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

כלומר $2b = 2d = e = a, c = 0$ ולכן $U \cap V = Sp \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ תמ"ו בעל ממד 1, ולכן

האחוד $V = Sp \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, והללו הם בסיסים. $U = Sp \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

שלהם הוא בסיס של $V+U$ $U+V = \mathbf{R}^5 = Sp \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

תשובה 9.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & a+b & 5 \\ -6 & 7 & -8 & 9 & -10 \\ 11 & -12 & 13+c & -14 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & a+b & 5 \\ 0 & -5 & 10 & 9+6a+6b & 20 \\ 0 & 10 & -20+c & -14-11a-11b & b-55 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & a+b & 5 \\ 0 & -5 & 10 & 9+6a+6b & 20 \\ 0 & 0 & c & 4+a+b & b-15 \end{pmatrix}$$

ולכן הדרגה המינימלית היא כאשר $a=-19, b=15, c=0$. עבור הערכים הללו בסיס של $C(A)$ הוא $\{(1, -6, 11), (2, -7, 12)\}$ ושל $S(A)$ $\{(1, -2, 3, -4, 5), (0, -5, 10, -15, 20)\}$

תשובה 10

א. נחשב את המשואה של הוקטורים בתת המרחב

ולכן $\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 3 & b \\ 2 & 4 & c \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{S_3+3S_1 \rightarrow S_3 \\ S_2+3S_1 \rightarrow S_2}]{S_2+3S_1 \rightarrow S_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 9 & b+3a \\ 0 & 10 & c+3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 4 & b+2a \\ 0 & 0 & c+3a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3b \\ 0 & 2 & b+2a \\ 0 & 0 & c+3a \end{pmatrix}$

כפי שקל לודא, הוקטורים של B מקיימים מעל Z_5 את המשואה $c+3a=0$.
ג. ההעתקה מחליפה בין הקואורדינטות ולכן ב V מתקיים $a+3b=0$.

ג. נבחר את C להיות התמונות של אברי B כלומר $C = \{\bar{c}_1, \bar{c}_2\}$

$$\bar{c}_1 = (2, 1, 2), \bar{c}_2 = (4, 2, 3)$$

ד. נבחר את B_1 להיות $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ נבדק שזהו בסיס על ידי זה

שנחשב את הדטרמיננט של המטריצה שעמודותיה B_1 ,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = 1(2 \cdot 4 - 2 \cdot 3) = 2 \neq 0$$

ולכן זהו בסיס של \mathbb{Z}_5^3

ה. נבחר את C_1 להיות $c_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ נבדק שזהו בסיס על ידי זה

שנחשב את הדטרמיננט של המטריצה שעמודותיה C_1 ,

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = (-1)(2 \cdot 3 - 2 \cdot 4) = 2 \neq 0$$

ואת $c_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ נבדק

ו. מצא את מטריצת המעבר $[M]_{B_1}^{C_1}, b_1 = \alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3$

$$\begin{aligned} (C_1 \ B_1) &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} S_3 - S_1 \rightarrow S_3 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} S_2 + 2S_1 \rightarrow S_2 \\ S_3 - S_1 \rightarrow S_3 \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 10 & 1 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} S_2 \leftrightarrow S_3 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} S_1 - S_3 \rightarrow S_1 \\ S_2 \leftrightarrow S_3 \end{smallmatrix}} \\ & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} 4S_2 \rightarrow S_2 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} 3S_1 \rightarrow S_1 \\ 4S_2 \rightarrow S_2 \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$[M]_{B_1}^{C_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

תשובה 11.

$$\begin{aligned}
p &= \det \begin{pmatrix} -1-x & 0 & 3 & -1 \\ 16 & 8-x & -11 & 2 \\ 6 & 4 & -1-x & 0 \\ 12 & 6 & -9 & 4-x \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1-x & 0 & 3 & -1 \\ 14-2x & 8-x & -5 & 0 \\ 6 & 4 & -1-x & 0 \\ 12 & 6 & -9 & 4-x \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} -1-x & 0 & 0 & -1 \\ 14-2x & 8-x & -5 & 0 \\ 6 & 4 & -1-x & 0 \\ 12 & 6 & 3-3x & 4-x \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1-x & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 8-x & -5 & 0 \\ -2 & 4 & -1-x & 0 \\ 0 & 6 & 3-3x & 4-x \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} -1-x & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 8-x & -5 & 0 \\ 0 & 4-x & x-4 & 0 \\ 0 & 6 & 3-3x & 4-x \end{pmatrix} = (x-4) \det \begin{pmatrix} -1-x & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 8-x & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3-3x & 4-x \end{pmatrix} \\
&= (x-4) \det \begin{pmatrix} -1-x & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 3-x & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9-3x & 3-3x & 4-x \end{pmatrix} = (x-4)(3-x) \det \begin{pmatrix} -1-x & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3-3x & 4-x \end{pmatrix} \\
&= (x-4)(3-x) \det \begin{pmatrix} -1-x & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 18-3x & 4-x \end{pmatrix} = (x-4)(3-x)[6-(4-x)(1+x)] = \\
&= (x-4)(3-x)(x^2-3x+2) = -(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)
\end{aligned}$$

לכן העי"ע העצמיים של A הם 1,2,3,4, נציב כל עי"ע במערכת ונמצא וי"ע הצמודים להם. עבור 1 נקבל

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} -1-x & 0 & 3 & -1 \\ 16 & 8-x & -11 & 2 \\ 6 & 4 & -1-x & 0 \\ 12 & 6 & -9 & 4-x \end{pmatrix} \lambda=1 \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & -1 \\ 16 & 7 & -11 & 2 \\ 6 & 4 & -2 & 0 \\ 12 & 6 & -9 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & -1 \\ 12 & 7 & -5 & 0 \\ 6 & 4 & -2 & 0 \\ 6 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\text{פורש את המרחב} &\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 6 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \\ 2z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

הצמוד עבור 2 נקבל

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} -1-x & 0 & 3 & -1 \\ 16 & 8-x & -11 & 2 \\ 6 & 4 & -1-x & 0 \\ 12 & 6 & -9 & 4-x \end{pmatrix} \xrightarrow{\lambda=2} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & -1 \\ 16 & 6 & -11 & 2 \\ 6 & 4 & -3 & 0 \\ 12 & 6 & -9 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & -1 \\ 10 & 6 & -5 & 0 \\ 6 & 4 & -3 & 0 \\ 6 & 6 & -3 & 0 \end{pmatrix} \\
 \text{פורש את המרחב} & \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & -1 \\ 10 & 6 & -5 & 0 \\ 6 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & -1 \\ 10 & 0 & -5 & 0 \\ 6 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 & \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -w \\ 0 \\ 0 \\ w \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

הצמוד עבור 3 נקבל

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} -1-x & 0 & 3 & -1 \\ 16 & 8-x & -11 & 2 \\ 6 & 4 & -1-x & 0 \\ 12 & 6 & -9 & 4-x \end{pmatrix} \xrightarrow{\lambda=3} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 & -1 \\ 16 & 5 & -11 & 2 \\ 6 & 4 & -4 & 0 \\ 12 & 6 & -9 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & -5 & 0 \\ 6 & 4 & -4 & 0 \\ 8 & 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \\
 \text{פורש את המרחב} & \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & -5 & 0 \\ 6 & 4 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \\ 3z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

הצמוד עבור 4 נקבל

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} -1-x & 0 & 3 & -1 \\ 16 & 8-x & -11 & 2 \\ 6 & 4 & -1-x & 0 \\ 12 & 6 & -9 & 4-x \end{pmatrix} \xrightarrow{\lambda=4} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 & -1 \\ 16 & 4 & -11 & 2 \\ 6 & 4 & -5 & 0 \\ 12 & 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 & -1 \\ 6 & 4 & -5 & 0 \\ 6 & 4 & -5 & 0 \\ 12 & 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} \\
 \text{פורש את המרחב} & \rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 & -1 \\ 6 & 4 & -5 & 0 \\ 12 & 6 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 & -1 \\ 6 & 4 & -5 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 & \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ x \\ -2x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

הצמוד

מטריצה מלכסנת היא

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$