



מבחן סוף בקורס לוגיקה ותכנות לוגי.

מועד ב יום ב יג אלול התשס"ז, 27-8-2007.

- מורה : גיורא דולה. מתרגל : רענן שכטר.
- משך המבחן שעתים וחצי.
- המבחן הוא ללא חומר עזר וללא מחשבוני, למעט דפי הנוסחאות המצורפים.
- המחברת משמשת לטיוטה בלבד ולא תבדק. התשובות שתבדקנה הן אלו שתתקבלנה על ידי הקפת האפשרות הנכונה בגוף השאלון, או על ידי כתיבת תשובה בשאלון.
- המבחן כולל 5 שאלות. על כלן יש לענות בגוף השאלון.
- שאלה ראשונה בת 5 סעיפים השוים 7 נקודות כל-אחד, סה"כ 35 נקודות ועוסקת במודלים.
- שאלה שנייה בת משקל 25 נקודות. ועוסקת בתחשיב פסוקים.
- שאלה 3 שאלת מעקב בפרולוג בת 20 סעיפים, כל אחד שווה נקודה סה"כ 20 נקודות.
- שאלה 4 כוללת כתיבת קוד פרולוג ומשקלה 14 נקודות
- שאלה 5 אודות החומר בקריאה עצמית ומשקלה 10 נקודות.

בהצלחה.

שאלה 1, אודות מודלים.

נתונה רשימה של פסוקים:

$$1. \exists X \exists Y [K(X, Y) \wedge M(X, Y)].$$

$$2. \exists X \exists Y [K(X, Y) \wedge \overline{M(X, Y)}].$$

$$3. \forall X \forall Y [\overline{K(X, Y)} \rightarrow M(X, Y)].$$

א. כתוב כאן מודל מינימלי בעל עולם לא ריק המקיים את תכונות 1-3.

ב. כתוב כאן שאר המודלים בעלי אותו מספר איברים המקימים את תכונות 1-3 שאינם איזומורפיים למודל הקודם.

נביט על התכונה הבאה:

$$4. \forall X [\overline{K(X, X)} \wedge \overline{M(X, X)}].$$

ג. כתוב כאן מודל מינימלי. המקימ את תכונות 1-4.

ד. כתוב כאן מודל מינימלי אשר מקים את תכונות 1-3 אך לא את תכונות 1-4.

נביט על התכונה הבאה.

$$5. \forall X [\overline{K(X, X)}].$$

ה. כתוב כאן מודל מינימלי. המקים את תכונות 1,2,3,5.

ו. כתוב כאן מודל מינימלי אשר מקים את תכונות 1-3 אך לא את תכונות 1,2,3,5.

שאלה 2, אודות טעונים תקפים.

הבט ברשימת ההנחות הבאות:

$$1. \forall X \forall Y \forall Z [\overline{A(X, Y)} \vee \overline{B(Y, Z)}].$$

$$2. \forall X [\overline{B(X, X)}].$$

$$3. \forall X \forall Y [A(X, Y) \vee B(X, Y)].$$

$$4. \exists X \exists Y [\overline{A(X, Y)} \wedge B(X, Y)].$$

ובמסקנות:

$$a) \exists X \exists Y \exists Z [A(X, Y) \rightarrow B(Y, Z)].$$

$$b) \exists X \exists Y \exists Z [B(X, Y) \rightarrow A(Y, Z)].$$

$$c) \forall X \forall Y \forall Z [A(X, Y) \rightarrow B(Y, Z)].$$

$$d) \forall X \forall Y \forall Z [B(X, Y) \rightarrow A(Y, Z)].$$

עבור כל אחת מהמסקנות a,b,c,d, האם יש לה טעון תקף? אם כן הוכח, אם לא תן מודל נגדי.

תשובה:

שאלה 3, פרולוג.

נתון הקוד הבא

a([X,Y],[X,Y],[]).%1

a([X],[X],[]).%2

a([X,Y,Z|U],[X,Y,Z],U).%3

b([X,Y,Z|U],[X|U1],[Y|U2],[Z|U3]):-b(U,U1,U2,U3).%4

b([X,Y],[],[],[]).%5

b([X],[],[],[]).%6

b([],[],[],[]).%7

c([X,Y,Z|U],[Y,Z,X|V]):-c(U,V).%8

c([X,Y],[]).%9

c([X],[]).%10

c([],[]).%11

e([],[],[],[]).%12

e([X],[],[],[]).%13

e([X],[Y],[],[]).%14

e([X|A],[Y|B],[Z|C],[X,Y,Z|W]):-e(A,B,C,W).%15

d(X,Y):-a(X,Z,U),b(U,A,B,C),e(A,B,C,V),c(V,Y).%16

ונתונה השאילתא:

$d([1,2,3,4,5,6,7,8,9,0,k,l,m],A)$.

זכור כי תנועה היא פתיחת שאילתא פנימית או חיצונית אשר מבצעת הפוש לאורך הקוד ועוצרת מול שורת קוד מתאימה. לכל סעיף, כתוב את השאילתא המתאימה, ומול איזו שורת קוד היא עוצרת. באם התכנית כלה עצרה והדפיסה, הנח שתקתק הסימן ; ושהתכנית המשיכה לרוץ. אם התכנית סימה אחרי k שאילתות ושואלים אותך על שאילתא $k+m$ כתוב-'אין כזו שאילתא-התכנית סימה'.

1-תנועה ראשונה.

2. תנועה שניה.

3-תנועה שלישית.

4. תנועה רביעית.

5-תנועה חמישית.

6. תנועה שישית.

7-תנועה שביעית.

8. תנועה שמינית.

9. תנועה תשיעית.

10. תנועה עשירית.

11-תנועה אחד עשר.

12. תנועה שנים עשר.

13 תנועה שלש עשר.

14. תנועה ארבע עשר.

15. תנועה חמש עשר.

16- מהו הפלט הראשון כלפי המשתמש? אם אין כזה רשום שאין.

17- כתוב את מספרי שורות הקוד מולם התכנית לא עצרה כלל.

18 כתוב את מספרי שורות הקוד מולם התכנית עצרה פעם אחת בדיוק.

19 כתוב את מספרי שורות הקוד מולם התכנית עצרה פעמים בדיוק.

20 כתוב את מספרי שורות הקוד מולם התכנית עצרה של פעמים בדיוק.

שאלה 4

רשם כאן קוד פרולוג אשר מקבל כקלט רשימה סדורה של איברים, ומחזיר את אותה שרשרת לאחר שהושמטו האיברים השני, הרביעי, השישי וכן הלאה, ושבה הוחלפו האיברים הנותרים במקומותיהם הראשון הפך אחרון, השלישי הפך להיות לפני האחרון וכדומה.

דוגמא

`mevukash([1,2,3,4,5,6,7,8,9,0,a,b,c,d,e,f],X).`

`X=[e,c,a,9,7,5,3,1].`

שאלה 5

נתונה סדרה $f(n)$ המקימת את נוסחת הנסיגה $f(n)=6f(n-1)-12f(n-2)+8f(n-3)$ ואת תנאי ההתחלה $f(0)=1, f(1)=6, f(2)=28$. מצא נוסחה מפורשת לסדרה.

א. ננסה מודל בן אבר יחיד a . אז לפי טענה ראשונה מתקים $K(a,a) \wedge M(a,a)$, ולפי טענה שניה מתקים $K(a,a)$ והשלילה של $M(a,a)$, ולכן קבלנו סתירה. לכן לא יתכן מודל בן אבר אחד.

ננסה מודל בן שני אברים a, b . נניח כי השורה הראשונה מתקימת על ידי $X=Y=a$ והשניה מתקימת על ידי $X=Y=b$. נקבל התחלת מודל:

$$U = \{a, b\}, K(a, a), K(b, b), M(a, a), \text{not}(M(b, b)).$$

לפי תכונה 3, כל זוג שאיננו מקים את K כן מקים את M , ולכן נשלים את המודל:

$$U = \{a, b\}, K(a, a), K(b, b), M(a, a), \text{not}(M(b, b)), M(b, a), M(a, b).$$

ב. נבדק מודלים אחרים בני שני איברים, על ידי זה שנחליף את הזוגות אשר מקימים את תכונות 1 ו-2. כמובן שהחלפת שמות נותנת מודלים איזומורפיים, ולכן ההחלפה הדרושה היא שתכונות 1 או 2 יתקמו על ידי זוג זהה או שונה. ונקבל מודלים:

$$U = \{a, b\}, K(a, a), K(a, b), M(a, a), \text{not}(M(a, b)), M(b, a), M(b, b).$$

$$U = \{a, b\}, K(a, b), K(b, b), M(a, b), \text{not}(M(b, b)), M(b, a), M(a, a).$$

$$U = \{a, b\}, K(a, b), K(b, a), M(a, b), \text{not}(M(b, a)), M(a, a), M(b, b).$$

ובסך הכל קבלנו 4 מודלים לא איזומורפיים בני שני איברים.

ג. אין מודל של 1-4 כיון שלפי 4 לכל x מתקים $\text{not}(M(X, X))$ ולפי 3 מתקים $M(X, X)$, כלומר 3 ו-4 יוצרות סתירה.

ד. כל המודלים של א ו-ב נופלים.

ה. תכונה 5 פוסלת הרבה מהמודלים שהיו בסעיפים א ו-ב ומשאירה את המודל היחיד:

$U = \{a, b\}, K(a, b), K(b, a), M(a, b), \text{not}(M(b, a)), M(a, a), M(b, b).$

ו. כל המודלים שנפלו מסעיפים א ו-ב הם דוגמאות מתאימות עבור סעיף זה.

תשובה 2

נביט בהנחות:

$$1. \forall X \forall Y \forall Z [\overline{A(X, Y)} \vee \overline{B(Y, Z)}].$$

$$2. \forall X [B(X, X)].$$

$$3. \forall X \forall Y [A(X, Y) \vee B(X, Y)].$$

$$4. \exists X \exists Y [\overline{A(X, Y)} \wedge B(X, Y)].$$

ונשים לב כי הנחות 1,2,3,4 גוררות סתירה. לפי 2, לכל X נובע $\text{not}(B(X, X))$. את 3

ניתן לכתוב כ-לכל X $\text{not}(B(X, X)) \rightarrow A(X, X)$ ולפי זה נובע כי לכל X , $A(X, X)$.

לפי 1 עבור $X=Y$ נובע כי לכל Z, X מתקים $\text{not}(B(X, Z))$, וזה מהווה סתירה ל-4.

לכן כל טענה נובעת מההנחות ולכן יש טעון תקף לכל סעיף.

תשובה 3

א-תנועה ראשונה

$d([1,2,3,4,5,6,7,8,9,0,k,l,m],A)$.

עוצרת בשורה 16

ב-תנועה שניה

$a([1,2,3,4,5,6,7,8,9,0,k,l,m],Z,U)$.

עוצרת בשורה 3

מתבצעת טעינה $Z=[1,2,3],U=[4,5,6,7,8,9,0,k,l,m]$.

ג-תנועה שלישית

$b([4,5,6,7,8,9,0,k,l,m],A3,B3,C3)$

עוצרת בשורה 4

ד-תנועה רביעית

$b([7,8,9,0,k,l,m],A4,B4,C4)$

עוצרת בשורה 4

ה-תנועה חמישית

$b([0,k,l,m],A5,B5,C5)$

עוצרת בשורה 4

ו-תנועה שישית

$b([m],A6,B6,C6)$

עוצרת בשורה 6

מתבצעות השמות $A3=[4,7,0],B3=[5,8,k],C3=[6,9,l]$

ז-תנועה שביעית

$e([4,7,0],[5,8,k],[6,9,1],V7)$

עוצרת בשורה 15

ה-תנועה שמינית

$e([7,0],[8,k],[9,1],V8)$

עוצרת בשורה 15

ט-תנועה תשיעית

$e([0],[k],[1],V9)$

עוצרת בשורה 15

י-תנועה עשירית

$e([],[],[],[])$

עוצרת בשורה 12

מתבצעת ההשמה $V7=[4,5,6,7,8,9,0,k,1]$

יא-תנועה אחד עשר

$c([4,5,6,7,8,9,0,k,1],Y)$

עוצרת בשורה 8

יב-תנועה שנים עשר

$c([7,8,9,0,k,1],Y)$

עוצרת בשורה 8

יג-תנועה שלש עשר

$c([0,k,1],Y)$

עוצרת בשורה 8

יד-תנועה ארבע עשר

$c([],Y)$

עוצרת בשורה 11

מתבצעת ההשמה $Y=[5,6,4,8,9,7,k,1,0]$

טו-תנועה חמישה עשר

אין תנועה, התכנית עצרה.

טז-הפלט הראשון כלפי המשתמש הוא $Y=[5,6,4,8,9,7,k,1,0]$

יז- התכנית לא עוצרת בשורות 1,2,5,7,9,10,13,14 כלל.

יח- התכנית עוצרת פעם אחת בשורות 3,6,11,12,16.

יט-אין שורה בה התכנית עוצרת פעמים .

כ-התכנית עוצרת שלש פעמים בשורות 4,8,15

תשובה 4

הקוד:

```
a([X,Y|Z],[X|W]):-a(Z,W).% 1
a([X],[X]).% 2
a([ ],[ ]).% 3
b([X|Y],Z):-b(Y,W),c(W,[X],Z).% 4
b([X],[X]).% 5
c([X|Y],Z,[X|W]):-c(Y,Z,W).% 6
c([ ],Z,Z).% 7
d(X,Y):-a(X,Z),b(Z,Y).% 8
```

מבצע את האלגוריתם המבוקש.

תשובה 5

הנתון $f(n)-6f(n-1)+12f(n-2)-8f(n-3)=0$ או $f(n)=6f(n-1)-12f(n-2)+8f(n-3)$ מגדיר פולינום אפיני $x^3-6x^2+12x-8=0$. ננחש כי יש לו פתרון שלם. אז הפתרון חיב לחלק את 8, ולכן ננסה את 1. נציב $x=1$ ונקבל כי הוא אינו פתרון. ננסה $x=2$, וקבלנו פתרון ולכן הפולינום האפיני מתחלק ב- $x-2$. נחלק ונקבל $x^3-6x^2+12x-8=(x-2)(x^2-4x+4)$ נחשב את השרשים של הפולינום הרבועי ונקבל כי $x^3-6x^2+12x-8=(x-2)(x-2)(x-2)$ לכן על הסדרה להיות מהצורה $x_n=a*n^22^n + b*n2^n + c*2^n$. נציב את תנאי ההתחלה $f(0)=1, f(1)=6, f(2)=28$ ונקבל שלש משוואות עם שלשת הנעלמים a, b, c .

$$c=1$$

$$(a+b+c)2=6$$

$$(4a+2b+c)4=28$$

נציב את c , נחלק את המקדמים ונקבל שתי משוואות:

$$a+b=2$$

$$4a+2b=6 \rightarrow$$

$$2a+b=3$$

נחסר משוואה ראשונה משנייה ונקבל $a=1$ ולכן גם $b=1$ ולכן הפתרון הוא:

$x_n = (n^2 + n + 1)2^n$ ואכן קל לראות כי סדרה זו מקימת את כל הדרוש.

רשימת חוקי לוגיקה

חוקי 0,1 (1-4) $1 \vee p \equiv 1$, $1 \wedge p \equiv p$, $0 \vee p \equiv p$, $0 \wedge p \equiv 0$

חוקי משלים (5-7) $p \vee \bar{p} \equiv 1$, $p \wedge \bar{p} \equiv 0$, $\bar{(\bar{p})} \equiv p$

חוקי דה-מורגן (8-11) $\overline{p \vee q} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}$, $\overline{p \wedge q} \equiv \bar{p} \vee \bar{q}$, $\underline{0} \equiv 1$, $\underline{1} \equiv 0$

חוקי אידמפוטנטיות (12-13) $p \vee p \equiv p$, $p \wedge p \equiv p$

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ הוקי פלוג (14-15)

$p \vee (p \wedge q) \equiv p$, $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ הוקי בליעה (16-17)

$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$, $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ הוקי קבוץ (18-19)

$p \vee q \equiv q \vee p$, $p \wedge q \equiv q \wedge p$ הוקי חלוף (20-21)

$[p \rightarrow q] \wedge p \rightarrow q$ (22) Modus ponens

$[p \rightarrow q] \wedge q \rightarrow p$ (23) Modus tolens

$[p \rightarrow q] \equiv [q \rightarrow p]$ (24) Contrapositia

$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ (25) Transitivity

$(p \wedge q) \rightarrow p$ $(p \wedge q) \rightarrow q$ (26) פרוט

$[(p \vee q) \wedge p] \rightarrow q$ cut (27)

$[(p \wedge q) \rightarrow r] \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$ exportatia (28)

$$(p \rightarrow q) \equiv \underline{p \vee q} \quad \text{(29) גרירה}$$

$$(p \leftrightarrow q) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv [(p \wedge q) \vee (\underline{p \wedge q})] \quad \text{(30) שקילות}$$

$$[(p \vee q) \wedge (\underline{p \vee r})] \rightarrow (q \vee r) \quad \text{(31) רזולוציה}$$

$$[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \rightarrow [p \rightarrow (q \wedge r)] \quad \text{(32)}$$

$$p \uparrow q \equiv \underline{p \wedge q} \quad \text{(33) nand}$$

$$p \downarrow q \equiv \underline{p \vee q} \quad \text{(34) nor}$$

$$p \oplus q \equiv [(p \vee q) \wedge (\underline{p \wedge q})] \equiv [(p \wedge q) \vee (\underline{p \wedge q})] \quad \text{(35) xor}$$

$$R(a) \vdash \exists R(x) \quad \text{(36) EG}$$

$$\exists R(x) \vdash R(a) \quad \text{בתנאי ש-} a \text{ שם עצם חדש בשפה} \quad \text{(37) EP(x/a)}$$

$$R(x) \vdash \forall R(x) \quad \text{(38) UG} \quad \text{בתנאי ש-כל ההופעות של } x \text{ ב-} R \text{ חפשיות.}$$

$\forall R(x) \vdash R(t)$ (39) US(x/t): באחת משתי האפשרויות הבאות:

1. t הוא קבוע כלשהו בשפה. 2. t הוא משתנה שהצבתו איננה מקלקלת הופעות חפשיות ב- R של אף משתנה.

$$\underline{\forall x(R(x)) \equiv \exists x(R(x))} \quad (40) \text{DM}$$

$$\underline{\exists x(R(x)) \equiv \forall x(R(x))} \quad (41) \text{DM}$$

$$[a \wedge (b \rightarrow c)] \rightarrow [(a \rightarrow b) \rightarrow c] \quad (42)$$