תרגום מבחן לוגיקה מועד ג התשסג לצורה אמריקאית. נכתב יום ג, ו ניסן התשסג, 8-4-2003 .

מכתב הסבר לתלמידי שנה ב בקשר למבחן האמצע בלוגיקה. המבחן אמור להיות ב-יום ה, כט בניסן התשסג, 1-5-2003

הקבץ מכיל את השאלון + הפתרון של מועד ג התשסג. חלק זה מופיע בlink אחר באתר שלי.

לאחר מכן, תורגמו שאלות 1-4 שבקובץ זה, ונכתבו בצורה שבה הן היו נכתבות בשאלון , אם היה נכתב כשאלון אמריקאי. נוספה שאלה מספר 5 שגם היא כתובה בצורה כזו. בשאלות 1-5 כל החישובים שנעשים במחברת הם לטיוטה, והתשובות הנקראות על ידי הבודק הן התשובות בהן יש להקיף בעגול.

שאלות 1-5 הללו מסבירות כיצד יראה השאלון הסופי-אך ההסבר הוא חלקי. יתכן (למשל) כי במבחן האמצע תהינה 0 שאלות כמו שאלה 1 , 1 כמו שאלה 2, 3 שאלות כמו שאלה 3 וכדומה. בנוסף, יתכן כי על נתוני שאלה 1 , (אם בכלל תהיה כזו בשאלון), לא יהיו 4 סעיפים להקיף בעגול, אלא 3 או 5 סעיפים או כל מספר אחר.

כל השאלות שתהינה בסופו של דבר, תהינה אך ורק כמו שאלות 1-5 .

הודעה נוספת על מבנה המבחן, תנתן באתר לאחר שהמבחן יכתב.

כל הערה אודות השאלון אפשר לכתב לי ל: giora@mars.netanya.ac.il

פסח כשר ושמח ולמודי לוגיקה נעימים.

הקובץ המקורי+פתרון

חוקי 0 ו – 1

לכל טענה p, 1 . $0\vee p=p$ 2 . $1\wedge p=p$. 3 . $\neg 0=1$ 4 . $\neg 1=0$
5 . $0\wedge p=0$ 6 . $1\vee p=1$

חוקי אידמפוטנציה

לכל טענה p, 7. $p\vee p=p$ 8. $p\wedge p=p$

חוקי שלילה

לכל טענה p מתקים

9. $\neg(\neg(p))=p$ 10. $p\vee(\neg p)=1$ 11. $p\wedge(\neg p)=0$

חוקי פלוג (דיסטריבוטיביות)

לכל טענות p, q ו- r מתקים

12. $p\wedge(q\vee r)=(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ 13. $p\vee(q\wedge r)=(p\vee q)\wedge(p\vee r)$

חוקי קבוץ (אסוציאטיביות)

לכל טענות p, q ו- r מתקים

14. $p\vee(q\vee r)=(p\vee q)\vee r$ 15. $p\wedge(q\wedge r)=(p\wedge q)\wedge r$

חוקי חלוף (קומוטטיביות)

לכל טענות p ו- q מתקים

16. $p\vee q=q\vee p$ 17. $p\wedge q=q\wedge p$

חוקי דה- מורגן

18. $\neg(p\vee q)=(\neg p)\wedge(\neg q)$ 19. $\neg(p\wedge q)=(\neg p)\vee(\neg q)$

<u>כלל 20 – modus ponens</u> $[(p\to q)\wedge p]\to q$

כלל 21 – modus tolens $[(p\rightarrow q)\wedge(\neg q)]\rightarrow(\neg p)$

כלל 22 טרנזיטיביות $[(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r)]\rightarrow(p\rightarrow r)$

כלל 23 כללי הפרוט $p\wedge q\rightarrow p$, $p\wedge q\rightarrow q$.

כלל 24 כלל הקונטרפוזיציה $(p\rightarrow q)\leftrightarrow((\neg q)\rightarrow(\neg p))$.

כלל 25 כלל cut $[(p\vee q)\wedge(\neg p)]\rightarrow q$.

כלל 26 כלל אקספורטציה $[(p\wedge q)\rightarrow r]\leftrightarrow[p\rightarrow(q\rightarrow r)]$

כלל 27 הגדרת גרירה $[(\neg p)\vee q]\leftrightarrow[p\rightarrow q]$

כלל 28 הגדרת שקילות $(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow[(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)]$

כלל 29 הגדרת שקילות $(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow[(p\wedge q)\vee((\neg p)\wedge(\neg q))]$

כלל 30 עקרון הרזולוציה $[(a\vee b)\wedge((\neg a)\vee c)]\rightarrow(b\vee c)$

כלל 31 $[(a\rightarrow b)\wedge(a\rightarrow c)]\rightarrow(a\rightarrow(b\wedge c))$

חוקי פרדיקטים:

$US(x/t)$ מותר להסיק מהפסוק $\forall xA(x)$ את הפסוק $A(t)$, בתנאי ש- t קבוע כלשהוא, או שהוא משתנה כך שהצבתו ב- A איננה מקלקלת אף הופעה חפשית.

$UG(x)$ מהפסוק $A(x)$ שבו כל ההופעות של x חפשיות, נובע הפסוק $\forall xA(x)$.

$EP(x/a)$ מהפסוק $\exists xA(x)$ נובע הפסוק $A(b)$. כדי שהמסקנה תהיה תקפה במקרה הכללי ביותר, על הקבוע b להיות חדש בשפה.

EG מהפסוק $A(b)$ נובע הפסוק $\exists xA(x)$.

מכללת נתניה- לוגיקה ותכנות לוגי- אביב התשס"ב

מורה: גיורא דולה.

מועד ג– יום ה ב כסלו התשס"ג 7-11-2002 שעה 9:00

משך המבחן 3 שעות- המבחן ללא חומר עזר למעט מחשבונים ודפים המצרפים לשאלון.

ענה על השאלות במקום המסומן בלבד. **תורדנה** נקודות על כל תשובה שלא תרשם במקום המתאים. באם הסתים המקום בדף ולא הסתימה התשובה, הפנה אותי בבקשה להמשך התשובה במחברת
צין את מספר העמוד.

המחברת משמשת לטיוטה בלבד ו**לא** תבדק, למעט מה שנאמר למעלה.

במבחן 10 שאלות.
שאלות 1,2,3 הן שאלות חובה.
ענה על שלש מתוך : שלש הסעיפים של שאלה 4, ו- שאלות 8,9. לכל אחת משקל זהה של 12 נקודות.
ענה על שלש מתוך השאלות 5,6,7,10 . לכל אחת משקל זהה של 10 נקודות.
בהצלחה.

שאלה 1 (10 נקודות).

עבור הטעון הבא, בדק על ידי טבלת אמת באם הוא תקף. אם כן, מצא לו הוכחה פורמלית:

1. $(\neg p)\vee q$.
2. $(\neg q)\vee(r\wedge s)$.
3. $(\neg r)\vee p$.

$(p\wedge r)\vee((\neg p)\wedge(\neg r))$.

תשובה: נתרגם את השורות בהתאמה ל- $p\to q$, $q\to (r\wedge s)$, $r\to p$ ול- $p\leftrightarrow r$.
אז מהרכבת 2 הראשונים נובע $p\to q$ ויחד עם השלישי נובע מה שצ"ל.

שאלה 2 (14 נקודות)

נתון מבנה U בשפת תחשיב היחסים המכיל שני יחסים חד מקומיים A ו- B ויחס דו מקומי D . לגבי כל אחד מהפסוקים הבאים קבע אם הוא אמיתי או שקרי במבנה U . תן נמוק קצר לקביעתך:

a. $\forall x \forall y\, [(D(x,y) \wedge A(x)) \rightarrow A(y)]$.
b. $\forall x \forall y [(D(x,y) \wedge B(x)) \rightarrow B(y)]$.
c. $\forall x \forall y \forall z [(D(x,y) \wedge D(y,z)) \rightarrow D(x,z)]$.
d. $\forall x \forall y\, [(A(x) \wedge B(y)) \rightarrow (\neg D(x,y))]$.
e. $\exists x \exists y [A(x) \wedge B(y) \wedge D(x,y)]$.
f. $\forall x \forall y\, [(A(x) \wedge B(y)) \rightarrow D(x,y)]$.
g. $\exists x \exists y [A(x) \wedge B(y) \wedge (\neg D(x,y))]$.

כאשר:
U= האנשים החיים בעולם, D(x,y) = x מבוגר מ- y , A(x) = ל- x יש תואר ראשון, B(x) = x בעל מכונית.

תשובות:

בכל מקרה של גרירה מספיק לבדוק האם $1 \rightarrow 1$ או $0 \rightarrow 1$.

A,b,d,f false.
C,e,g. true:

שאלה 3 (10 נק)

לפניך ארבעה פסוקים בשפת תחשיב היחסים. מצא מבנה (מודל) בשפת תחשיב היחסים אשר מקים את שלשת הפסוקים הראשונים ולא את הרביעי.

1. $\forall x \forall y \forall z[(D(x,y) \wedge (\neg D(y,z))) \rightarrow (\neg D(x,z))]$.
2. $\forall x \forall y \forall z[(D(x,y) \wedge D(y,z)) \rightarrow D(x,z)]$.
3. $\forall x(D(x,x))$.

---

4. $\forall x \forall y \forall z[(\neg(D(x,y)) \wedge (\neg D(y,z))) \rightarrow (\neg D(x,z))]$.

תשובה:

כל יחס שקילות.

שאלה 4 (3X12) .

לפניך שלשה טעונים בשפת תחשיב היחסים. לגבי כל טעון, אם הוא תקף, הבא הוכחה מלאה לתקפותו, ובאם איננו תקף, הוכח את אי תקפותו על ידי מציאת מודל מתאים.

א.

1. $\forall x \forall y \forall z[(D(x,y) \wedge (\neg D(y,z))) \rightarrow (\neg D(x,z))]$.
2. $\forall x \forall y \forall z[(D(x,y) \wedge D(y,z)) \rightarrow D(x,z)]$.
3. $\forall x \forall y(D(x,y) \rightarrow D(y,x))$.

---

4. $\forall x \forall y \forall z[(\neg(D(x,y)) \wedge (\neg D(y,z))) \rightarrow (\neg D(x,z))]$.

מודל נגדי: כל יחס שקילות

ב.

1. $\forall x \forall y \forall z[(D(x,y) \wedge D(y,z)) \rightarrow D(x,z)]$.
2. $\forall x \forall y\ [(D(x,y) \wedge D(y,x)) \rightarrow (x=y)]$.
3. $\forall x\ (D(x,x))$.

---

4. $\forall x \forall y\ [(D(x,y) \vee D(y,x)]$.

מודל נגדי: כל יחס סדר שאיננו מלא

ג.

1. $\forall x \forall y \forall z[(D(x,y) \wedge D(y,z)) \rightarrow D(x,z)]$.
2. $\forall x \forall y\ [(D(x,y) \wedge D(y,x)) \rightarrow (x=y)]$.
3. $\forall x\ (D(x,x))$.

---

4. $\forall x \forall y \forall z\ [(D(x,y) \wedge D(y,z) \wedge D(z,x) \rightarrow (x=y=z)]$.

תשובה:

5. D(x,y),D(y,z),D(z,x), 4,3US, part..
6. $D(y,z) \wedge D(z,x)) \rightarrow D(y,x)$, 4,1,US.
7. $[(D(x,y) \wedge D(y,x)) \rightarrow (x=y)]$ 2.

שאלה 5 (10 נקודות).

כתוב יחס בשפת Prolog, ssh(X,Y) שבו X היא רשימת קלט סדורה של מספרים שלמים, המצליח אם Y הוא סכום האיברים המופיעים במקומות המתחלקים ב- 3 , (מקום שלישי, שישי וכד'), פחות סכום האיברים המופיעים במקומות אשר יש להם שארית 1 בחלוקה ל- 3 , (מקום ראשון רביעי וכד').
מותר להשתמש בכל קוד שרשמנו בכתה מבלי לפרט, אך אסור להשתמש בפונקציות ספריה. דוגמות ריצה:

```
?-ssh([1,2],Y).
Y=-1.
?-ssh([1,2,3],Y).
Y=3-1=2
```

הבושת:

```
--------code of ssh(X,Y)-------
ssh([],0).
ssh([X],Y):-Y is -X.
ssh([X,Y],Z):-Z is -X.
ssh([X,Y,Z|T],W):-ssh(T,A),W is A+Z-X.
--------end code sz------------------
```

שאלה 6 (10 נקודות).

כתוב יחס בשפת Prolog, sk(X,Y) שבו X היא רשימת קלט של מספרים שלמים, ו- Y היא רשימת פלט של מספרים שלמים, אשר מכילה את כל האיברים של X במקומות הזוגיים, סדורים בסדר עולה. דוגמות ריצה:

```
?-sk([1],S).
S=[].
?-sk([1,2],S).
S=[2].
?-sk([1,2,3],S).
S=[2].
?-sk([4,3,2,1],S).
S=[1,3].
```

הבושת:

------------code of sk----------

```
sk([],[]).
sk([X],[]).
sk([X,Y],[Y]).
sk([X,Y|Z],[Y,A|B]):-sk(Z,[A|B]), Y<=A.
sk([X,Y|Z],[A|W]):-sk(Z,[A|B]), A<Y,mos(Y,B,W).
mos(Y,[],[Y]).
mos(Y,[Z|W],[Y,Z|W]):-Y<=Z.
mos(Y,[Z|W],[Z|U]):-Z<Y, mos(Y,W,U).
-------end code sk--------------
```

שאלה 7 (10 נקודות)

נתון הקוד הבא בשפת Prolog, zb(X,Y).

```
---------begin code---------
zb([X],[X]).
zb([X,Y],Z):-Z is X+Y.
zb([X,Y|Z],[H|T]):-H is X+Y, zb(Z,T).
---------end code------------
```

ונתונה השאילתא

```
?-zb([0,1,2,3,4,5],S).
```

תאר את בצוע התכנית במחשב, את המטרות(=שאילתות) ואת שמות המשתנים, עד קבלת התשובה הראשונה כלפי המשתמש.

תשובה

```
?-zb([0,1,2,3,4,5],S).
```

שאלה 8

האם אפשר על ידי הקשרים קסור $\oplus$ ו- גרירה $\rightarrow$ לבטא את הקשר nand $\uparrow$?
אם כן- בטא, ואם לא-הוכח מדוע לא.

תשובה:

$$(a\rightarrow (a\oplus b)) \equiv (a\uparrow b)$$

שאלה 9.

מצא את צורת ה- dnf ואת צורת ה- cnf של הבטוי הבא,x. פרט את כל השלבים. $x=(((a\downarrow b)\downarrow c)\downarrow d)\vee(((a\uparrow b)\uparrow c)\uparrow d)$

תשובה:

$$(((a\downarrow b)\downarrow c)\downarrow d)\equiv\neg(\neg((\neg(a\vee b))\vee c)\vee d)\equiv((\neg(a\vee b))\vee c)\wedge(\neg d)\equiv$$
$$((\neg a)\wedge(\neg b)\vee c)\wedge(\neg d)\equiv ((\neg a)\wedge(\neg b)\wedge(\neg d))\vee(c\wedge(\neg d)).$$
$$(((a\uparrow b)\uparrow c)\uparrow d)\equiv\neg(\neg((\neg(a\wedge b))\wedge c)\wedge d)\equiv((\neg(a\wedge b))\wedge c)\vee(\neg d)\equiv$$
$$(((\neg a)\vee(\neg b))\wedge c)\vee(\neg d)\equiv((\neg a)\wedge c)\vee((\neg b))\wedge c)\vee(\neg d)$$

נשים לב כי הבטוי $(\neg d)$ שהוא מחובר בבטוי השני, כולל בחבו את כל המחברים של $(((a\downarrow b)\downarrow c)\downarrow d)$. לכן $dnf((((a\uparrow b)\uparrow c)\uparrow d))= dnf(x)$. לכן $dnf(x)$ יכיל את כל 8 הבטויים הכוללים את-$(\neg d)$, ובנוסף יכיל גם את 3 הבטויים שבהם יש $c\wedge d$ ושאחד לפחות מ- a או b הוא ב-- .
סה"כ יהיו בו 11 דיסיונקטים.

קל יותר לחשב את $dnf(\neg x)$. יהיו בו 5 מחוברים. אחד מהם הוא abcd וכל שאר הארבעה יהיו כל הבטויים המכילים את $(\neg c)\wedge d$. אותם בטויים יקבעו גם 5 מכפלות ב- $cnf(x)$.

שאלה 10

בטא את $p\to q$ תוך שמוש בקשר $nor(\downarrow)$ בלבד.

תשובה: $p\to q\equiv(\neg p)\vee q\equiv\neg\neg((\neg p)\vee q)\equiv\neg((\neg p)\downarrow q)\equiv\neg((p\downarrow p)\downarrow)q$

ולכן $p\to q\equiv[((p\downarrow p)\downarrow)q]\downarrow[((p\downarrow p)\downarrow)q]$.

נסוח אמריקאי

עבור כל השאלות דלהלן, פתור במחברתך את כל השלבים בפרוט. המחברת לא תבדק. אחרי כן ענה על השאלות הבאות על ידי הקפת התשובה הנכונה.

שאלה 1

רשום במחברת את כל הפסוקים הנובעים מתוך שלש ההנחות 1,2,3 ואחר-כך ענה על שאר הסעיפים:

1. $(\neg p)\vee q$.
2. $(\neg q)\vee(r\wedge s)$.
3. $(\neg r)\vee p$.

$(p\wedge r)\vee((\neg p)\wedge(\neg r))$.

הפסוק p נובע מההנחות : נכון/לא נכון

הפסוק $\neg q$ נובע מההנחות : נכון/לא נכון

הפסוק $((\neg p)\wedge(\neg r))$ נובע מההנחות : נכון/לא נכון

הפסוק $p\rightarrow q$ נובע מההנחות : נכון/לא נכון

שאלה 2

נתון מבנה U בשפת תחשיב היחסים המכיל שני יחסים חד מקומיים A ו- B ויחס דו מקומי D כדלהלן:

U=האנשים החיים בעולם, $D(x,y) = x$ מבוגר מ- y , $A(x) =$ ל- x יש תואר ראשון, $B(x) = x$ בעל מכונית.

לגבי כל אחד מהפסוקים הבאים קבע אם הוא אמיתי או שקרי במבנה U .

הפסוק $\forall x\forall y\, [(D(x,y)\wedge A(x))\rightarrow A(y)]$. אמיתי/שקרי

הפסוק $\forall x\forall y[(D(x,y)\wedge B(x))\rightarrow B(y)]$. אמיתי/שקרי

הפסוק $\forall x\forall y\forall z[(D(x,y)\wedge D(y,z))\rightarrow D(x,z)]$. אמיתי/שקרי

הפסוק $\forall x\forall y\, [(A(x)\wedge B(y))\rightarrow (\neg D(x,y))]$. אמיתי/שקרי

הפסוק $\forall x\forall y\, [(A(x)\wedge B(y))\rightarrow D(x,y)]$. אמיתי/שקרי

הפסוק $\exists x\exists y[A(x)\wedge B(y)\wedge D(x,y)]$ אמיתי/שקרי

הפסוק $\exists x\exists y[A(x)\wedge B(y)\wedge (\neg D(x,y))]$. אמיתי/שקרי

שאלה 3

להלן ארבעה פסוקים בשפת תחשיב היחסים.

1. $\forall x\forall y\forall z[(D(x,y)\wedge(\neg D(y,z)))\rightarrow(\neg D(x,z))]$.
2. $\forall x\forall y\forall z[(D(x,y)\wedge D(y,z))\rightarrow D(x,z)]$.
3. $\forall x(D(x,x))$.
4. $\forall x\forall y\forall z[(\neg(D(x,y))\wedge(\neg D(y,z)))\rightarrow(\neg D(x,z))]$.

מצא במחברתך מבנים אשר מקיימים את שלשת הפסוקים הראשונים ולא את הרביעי ברשימה מעל: ענה על השאלות הבאות:

1 . קים מבנה כזה שבו U מכיל אבר אחד בדיוק נכון/לא נכון.

2 . קים מבנה כזה שבו U מכיל שני אברים בדיוק נכון/לא נכון.

1 . לא קים מבנה כזה U בכלל נכון/לא נכון.

שאלה 4 .

לפניך טעון בשפת תחשיב היחסים. בדוק את תקפותו או אי תקפותו במחברתך (ולא בדרך השלילה).

א.

1. $\forall x \forall y \forall z[(D(x,y) \wedge (\neg D(y,z))) \rightarrow (\neg D(x,z))]$.
2. $\forall x \forall y \forall z[(D(x,y) \wedge D(y,z)) \rightarrow D(x,z)]$.
3. $\forall x \forall y(D(x,y) \rightarrow D(y,x))$.

---

4. $\forall x \forall y \forall z[(\neg(D(x,y)) \wedge (\neg D(y,z))) \rightarrow (\neg D(x,z))]$.

לגבי כל אחת מהפסוקים הבאים ענה אם הוא נובע או לא מ-3 ההנחות.

1 . קימים קבועים a,b בשפה כך ש- נובע $D(a,b)$: נכון/לא נכון.
2 . קימים קבועים a,b,c בשפה כך ש- נובע $D(a,b) \wedge (\neg D(b,c))$: נכון/לא נכון.
3 . עבור משתנים x,y בשפה נובע $D(x,y) \rightarrow D(y,y)$: נכון/לא נכון.

שאלה 5 .

לפניך מספר פסוקים בשפת תחשיב היחסים. הוכח במחברתך כל מסקנה שתוכל מהם.

1. $\forall x \forall y \forall z[(D(x,y) \wedge (\neg D(y,z))) \rightarrow (\neg D(x,z))]$.
2. $\forall x \forall y \forall z[(D(x,y) \wedge D(y,z)) \rightarrow D(x,z)]$.
3. $\forall x \forall y(D(x,y) \rightarrow D(y,x))$.

לגבי כל אחת מהפסוקים הבאים ענה אם הוא נובע או לא מ-3 ההנחות.

1 . קימים קבועים a,b בשפה כך ש- נובע $D(a,b)$: נכון/לא נכון.

2 . קימים קבועים a,b,c בשפה כך ש- נובע $D(a,b)\wedge(\neg D(b,c))$: נכון/לא נכון.

3 . עבור משתנים x,y בשפה נובע $D(x,y)\rightarrow D(y,y)$: נכון/לא נכון.