המכללה האקדמית נתניה ע"ר
רח' האוניברסיטה 1
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

NETANYA ACADEMIC COLLEGE (R"S)
1 University St.
Kiryat Yitzhak Rabin
NETANYA 42365, ISRAEL

מבחן סוף בקורס מבוא לאנליזה נומרית-סמסטר סתו, מועד א.

יום ד, יז אדר התשע"ג 27-2-2013

- מורה : גיורא דולה. מתרגל : רענן שכטר.
- משך המבחן שלוש שעות.
- מותר להשתמש במחשבונים לא מדעיים ובדפי הנוסחאות המצורפים.
- התשובות תכתבנה במחברת.
- יש לנמק את כל החשובים.
- המבחן כולל 6 שאלות.
- משקל כל אחת משאלות 1-4 הוא 20 נקודות .
- שאלה 5 שאלת הוכחה בת משקל של 10 נקודות.
- שאלה 6 היא שאלות הבנה ומשקלה 10 נקודות.

בהצלחה.

עמותה רשומה 580242451 **Fax:** (972-9) 8844439 **:פקס** **Tel:** (972-9) 8607777 **:טל**

שאלה ראשונה (20 נקודות).

א. מצא את n כך ש $P_n(x)$, פולינום מקלורן מסדר n של הפונקציה $f(x)=\sqrt{576+100x}$ יקיים ש $|f(x)-P_n(x)|<0.2$ עבור כל x בקטע [0,2.8].

ב. עבור אותו n שמצאת בסעיף א, חשב את $P_n(x)$.

ג. עבור אותו n שמצאת בסעיף א, חשב את $P_n(0.49)$.

ד. עבור אותו n שמצאת בסעיף א, מצא את c כך שיתקיים השויון $f(0.49)-P_n(0.49)=R_n(c)$.

שאלה שניה (20 נקודות).

א. עבור הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{x}$ מצא את ישר האינטרפולציה $P_1(x)$, בנקודות $a_0=8, a_1=64$

ב. מצא את c כך שיתקיים השויון $f(27)-P_1(27)=R_1(c)$.

ג. מהו n כך שעבור $a_0=27,....,a_n=54$ פולינום האינטרפולציה $P_n(x)$ של $f(x)=\sqrt[3]{x}$ יקיים לכל x בקטע [27,54] ש- $|f(x)-P_n(x)|<0.01$.

ד. עבור $f(x)=\sqrt{x}$ חשב את ישר טיילור $S_1(x)$ סביב a=4 את ישר טיילור $T_1(x)$ סביב a=9 , ואת ישר האינטרפולציה $Q_1(x)$ דרך a=4,b=9.

ה. מצא קטע שבו ישר האינטרפולציה $Q_1(x)$ מסעיף ד מקרב טוב יותר את f של סעיף ד מאשר ישר טיילור $S_1(x)$ סביב a=4 וטוב יותר מאשר ישר טיילור $T_1(x)$ סביב a=9.

שאלה שלישית (20 נקודות).

א. חסום על ידי קבועים את הנגזרות מסדר 1, ו-2 של הפונקציה $f(x)=e^{\sqrt{x}}$, בקטע $[1,4]$. (4 נקודות)

ב. חסום, על ידי חסם שהוא פונקציה של n בלבד את השגיאה שבחשוב $\int_1^4 e^{\sqrt{x}}dx$, על ידי שיטת סכומי רימן עם n קטעים שוים ונקודת בינים בשמאל. (4 נקודות)

ג. חסום, על ידי חסם שהוא פונקציה של n בלבד את השגיאה שבחשוב $\int_1^4 e^{\sqrt{x}}dx$, על ידי שיטת הטרפז עם n קטעים שוים. (4 נקודות)

ד. מצא M שהחל ממנו החסם שבסעיף ג יהיה פחות מאלפית כפול החסם שבסעיף ב. (4 נקודות)

ה. חסום על ידי קבועים את הנגזרות מסדר 3, ו-4 של הפונקציה $f(x)=e^{\sqrt{x}}$, בקטע $[1,4]$. (2 נקודות)

ו. חסום, על ידי חסם שהוא פונקציה של n בלבד את השגיאה שבחשוב $\int_1^4 e^{\sqrt{x}}dx$, על ידי שיטת סימפסון עם 2n קטעים שוים. (נקודה אחת)

ז. מצא M שהחל ממנו החסם שבסעיף ו יהיה פחות מאלפית כפול החסם שבסעיף ג. (נקודה אחת)

שאלה רביעית (20 נקודות)

א. העבר את המשואה $f(x)=x^3-2x^2-x+2=0$ לצורת נקודת השבת על ידי העברת x^3 לצד שני והוצאת שורש שלישי .

ב. עבור g שמצאת בסעיף הקודם, מצא איזו נקודת שבת דוחה איזו מושכת והאם יש נקודה שאי אפשר להחליט לגביה אם היא דוחה או מושכת, ומצא את הנקודה המושכת ביותר.

ג. העבר את המשואה $f(x)=x^3-2x^2-x+2=0$ לצורת נקודת השבת על ידי העברת $2x^2$ לצד שני והוצאת שורש רבועי .

ד. עבור g שמצאת בסעיף הקודם, מצא איזו נקודת שבת דוחה איזו מושכת והאם יש נקודה שאי אפשר להחליט לגביה אם היא דוחה או מושכת, ומצא את הנקודה המושכת ביותר.

ה. מצא עבור המשואה $f(x)=x^3-2x^2-x+1=0$ קטע בו מתקיים המשפט עבור התכנסות שיטת ניוטון רפסון.

ו. באותו קטע חשב שורש של הפולינום ברמת דיוק של 0.01

שאלה חמישית (10 נקודות)

הוכח את המשפט :

נניח כי f בעלת נגזרת שניה רציפה בקטע [a,b], כי $f(a)<0<f(b)$ וכי f',f'' חיוביות בקטע [a,b]. אז.

א. למשואה $f(x)=0$ יש פתרון יחיד בקטע שיסומן c.

ב. נגדיר $x_0=b$ ונגדיר $x_{n+1}=x_n-f(x_n)/f'(x_n)$. אז הסדרה הזו מתכנסת ל c.

ג. נסמן $M=\sup_{a\le x\le b} f''(x), m=\inf_{a\le x\le b} f'(x)$ אז לכל n מתקיים

$$x_{n+1}-c\le \frac{M(x_{n+1}-x_n)^2}{2m}$$

שאלה שישית (10 נקודות)

מצא פונקציה f ונקודה ממשית a כך שלמשואה $f(x)=0$ יש פתרון $x=a$, וכשפותרים את הבעיה $f(x)=0$ בשיטת ניוטון רפסון, מקבלים כי ישנם אינסוף קטעים זרים בזוגות, כך שאם x_0 נבחר באחד מאותם קטעים, אז מתקיים $|x_0-a|<|x_1-a|$

דף נוסחאות עבור המבחן בנומרית:

נוסחאות סכומים:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}, \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

נוסחת פולינום טיילור:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!} + R_n$$

נוסחת שארית לגרנז עבור פולינום טיילור:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

נוסחת ישר האינטרפולציה:

$$y = f(a) + \frac{(x-a)(f(b)-f(a))}{(b-a)}$$

מטריצת ון דר מונדה

$$vdm=\begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ 1 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

$$\det(vdm)=\prod_{0\le i<j\le n}(a_j-a_i)$$

שיטת לגרנז למציאת פולינום האינטרפולציה

$$p=f(a_0)q_0(x)+\cdots+f(a_n)q_n(x)$$

$$q_i(x)=\frac{\prod_{j\ne i}(x-a_j)}{\prod_{j\ne i}(a_i-a_j)}$$

הנוסחה שעליה מסתמכת שיטת נוויל

$$p(x)=\frac{(x-a_0)h(x)-(x-a_{n+1})g(x)}{(x-a_0)-(x-a_{n+1})}$$

$$h(a_i)=f(a_i),1\le i\le n+1$$

$$g(a_i)=f(a_i),0\le i\le n$$

$$P_{m,n}=\frac{(x-x_m)P_{m+1,n}-(x-x_n)P_{m,n-1}}{(x-x_m)-(x-x_n)}$$

נוסחת שארית לגרנז לפולינום האינטרפולציה :

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(c(x))(x-a_0)\cdot\cdots\cdot(x-a_n)}{(n+1)!}$$

נוסחת סכום רימן :

$$SR=\sum_{i=1}^{n}f(c_i)(x_i-x_{i-1}),a=x_0\le c_1\le x_1\le c_2\le x_2\le\cdots x_n=b$$

נוסחת סכום רימן למקרה שלכל I , $x_i-x_{i-1}=h=(b-a)/n$:

$$SR = h\sum_{i=1}^{n} f(c_i), a = x_0 \le c_1 \le x_1 = a + h \le c_2 \le x_2 = a + 2h \le \cdots x_n = a + nh = b$$

נוסחת השגיאה של סכום רימן בעל קטעים שוים, ונקודת בינים בשמאל

$$\frac{f'(c)(b-a)h}{2} = \frac{f'(c)(b-a)^2}{2n}$$

נוסחת סכום הטרפז עבור קטעים שוים

$$ST = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + f(b)\right)$$

נוסחת השגיאה בשיטת הטרפז :

$$\frac{f''(c)(b-a)h^2}{12} = \frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}$$

שיטת סימפסון עם n קטעים שוים (n=2m זוגי) :

$$\frac{h}{3}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(a+2kh) + 4\sum_{k=0}^{m-1} f(a+2kh+h) + f(b)\right), h = \frac{b-a}{n}$$

שגיאה בשיטת סימפסון :

$$\frac{f''''(c)h^4(b-a)}{180} = \frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4}$$

שיטת החציה :

a_0,b_0. נקודות שנקבעו בנחוש, כך ש- $f(a_0)f(b_0)<0$. בהנתן a_n,b_n נקודות עם אותן הנחות, נגדיר $c_n=(a_n+b_n)/2$, ונביט על $f(c_n)$. אם בטוי זה שוה ל-0 סימנו, ואם לא אז $[a_{n+1},b_{n+1}]=[a_n,c_n]$, או, $[a_{n+1},b_{n+1}]=[c_n,b_n]$. הדבר נקבע כך ש -$f(a_{n+1})f(b_{n+1})<0$.

שיטת ניוטון רפסון-(המשיק) :

x_0. נקודה שנקבעה בנחוש. אז $x_{n+1}=g(x_n)$, כאשר $g(x)=x-f(x)/f'(x)$

שיטת המיתר :

x_0,x_1. נקודות שנקבעו בנחוש, אז

$$x_{n+1}=\frac{x_n f(x_{n-1})-x_{n-1}f(x_n)}{f(x_{n-1})-f(x_n)}=\frac{x_{n-1}f(x_n)-x_n f(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

מהירות ההתכנסות של שיטת נקודות שבת (ההתכנסות רק אם $x_n\to l$)

$$\frac{e_{n+1}}{e_n}=g'(c_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}g'(l)$$

נוסחת הערכת השגיאה במשפט נקודות השבת:

$|E_n|\le M^n(b-a)$, $M=\sup g'(x)$, $a\le x\le b$

עבור סדרה מסדר שני המתכנסת ל-p

$$\frac{e_{n+1}}{(e_n)^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{g''(p)}{2}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

עבור שיטת ניוטון רפסון

$$g''(p)=\frac{f''(p)}{f'(p)}$$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$|x_{n+1}-L|\le\frac{M}{2m}(x_{n+1}-x_n)^2$$

כאשר $m=\inf f'$, $M=\sup f''$ בקטע $[a,b]$ שבו $f(a)f(b)<0$ וגם $f',f''>0$.

תשובה ראשונה

א.

$$f(x)=\sqrt{576+100x},\ f'(x)=\frac{100}{2\sqrt{576+100x}},\ f''(x)=\frac{-10000}{4(\sqrt{576+100x})^3},$$

$$f'''(x)=\frac{(-1)(-3)100^3}{2^3(\sqrt{576+100x})^5},\cdots,\ f^{(n)}(x)=\frac{(-1)(-3)(-5)\cdots(3-2n)100^n}{2^n(\sqrt{576+100x})^{2n-1}},$$

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{(-1)(-3)\cdots(1-2n)100^{n+1}}{2^{n+1}(\sqrt{576+100x})^{2n+1}}$$

ולכן :

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)x^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{(-1)(-3)\cdots(3-2n)(1-2n)100^{n+1}x^{n+1}}{2^{n+1}(\sqrt{576+100c})^{2n+1}(n+1)!},$$

$$|R_n(x)|=\frac{1}{2}\frac{3}{2\cdot2}\cdots\frac{2n-1}{2\cdot n}\frac{1}{2\cdot(n+1)}\frac{(100x)^{n+1}}{(\sqrt{576+100c})^{2n+1}},$$

$$|R_n(x)|\le\frac{1}{2}\cdot1\cdots1\frac{1}{2\cdot(n+1)}\frac{(100x)^{n+1}}{(\sqrt{576+100\cdot0})^{2n+1}}\le\frac{(100x)^{n+1}}{2(n+1)(\sqrt{576})^{2n+1}}=$$

$$=\frac{24(100x)^{n+1}}{2(n+1)(576)^{n+1}}=\frac{12}{n+1}\left(\frac{100x}{576}\right)^{n+1}\le\frac{12}{n+1}\left(\frac{280}{576}\right)^{n+1}<\frac{12}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.\frac{12}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{16}=0.1875$$

ב.

כלומר $n=3$ מספיק עבור השגיאה.

$$f(x)=\sqrt{576+100x},\ f'(x)=\frac{100}{2\sqrt{576+100x}},\ f''(x)=\frac{-10000}{4(\sqrt{576+100x})^3},$$

$$f'''(x)=\frac{(-1)(-3)100^3}{2^3(\sqrt{576+100x})^5},\cdots,\ f^{(n)}(x)=\frac{(-3)(-7)\cdots(3-2n)100^n}{2^n(\sqrt{576+100x})^{2n-1}},$$

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{(-1)(-3)\cdots(1-2n)100^{n+1}}{2^{n+1}(\sqrt{576+100x})^{2n+1}}$$

$$f(0)=24,\ f'(0)=\frac{100}{48},\ f''(0)=\frac{-2500}{24^3}=\frac{-625}{2^7 3^3},\ f'''(0)=\frac{(-1)(-3)100^3}{2^3(24)^5}=\frac{25^3}{2^{12}3^4},$$

$$P_3(x)=24+\frac{25x}{12}-\frac{625x^2}{2^8 3^3}+\frac{25^3x^3}{2^{13}3^5}$$

ג.

$$P_3(x)=24+\frac{25x}{12}-\frac{625x^2}{2^8 3^3}+\frac{25^3x^3}{2^{13}3^5},P_3(0.49)=24+\frac{25\cdot 49}{1200}-\frac{625(49)^2}{2^8 3^3 100^2}+\frac{25^3(49)^3}{2^{13}3^5(100)^3}=$$

$$=24+\frac{49}{48}-\frac{2401}{2^{12}3^3}+\frac{49^3}{2^{19}3^5}=25+\frac{2^{15}3^4-2^7 3^2\cdot 2401+49^3}{2^{19}3^5}=25+\frac{5905}{2^{19}3^5}$$

$$f(x)=\sqrt{576+100x},\ f(0.49)=\sqrt{576+49}=\sqrt{625}=25$$

ד

$$f(0.49)-P_3(0.49)=25-(25+\frac{5905}{2^{19}3^5})=-\frac{5905}{2^{19}3^5}=e$$

$$\to\frac{(-1)(-3)(-5)100^4}{2^4(\sqrt{576+100c})^7}(\frac{49}{100})^4\frac{1}{24}=-\frac{5905}{2^{19}3^5}\to\frac{(-5)100^4}{2^7(\sqrt{576+100c})^7}(\frac{49}{100})^4=-\frac{5905}{2^{19}3^5}\to$$

$$\frac{1}{\sqrt{576+100c}^7}=\frac{5905\cdot 128}{2^{19}3^5\cdot 5\cdot 49^4}=\frac{1181}{2^{12}3^5 49^4}\to$$

$$\sqrt{576+100c}^7=\frac{2^{12}3^5 49^4}{1181}\sim 4858482514.5876,$$

$$576+100c=\sqrt[7]{\frac{2^{12}3^5 49^4}{1181}}\sim 585.55655,c\sim\frac{9.55655}{100}=0.0955655$$

תשובה שנייה

א. $$f(x)=\sqrt[3]{x},\ f(8)=2,\ f(64)=4, P_1=\frac{(x-8)(4-2)}{(64-8)}+2=\frac{(x-8)}{28}+2=\frac{x+48}{28}$$

ב.

$$f(27)-P_1(27)=\sqrt[3]{27}-\frac{27+48}{28}=3-\frac{75}{28}=\frac{3}{28}=R_1(c)=\frac{f''(c)(27-8)(27-64)}{2}\rightarrow$$

$$f''(c)=\frac{6}{28\cdot 19\cdot(-37)}\rightarrow\frac{1}{3}\frac{(-2)}{3}c^{-5/3}=\frac{-3}{14\cdot 19\cdot 37}\rightarrow c^{-5/3}=\frac{27}{28\cdot 19\cdot 37}\rightarrow c^{5/3}=\frac{19684}{27}\rightarrow$$

$$c=(\frac{19684}{27})^{0.6}\sim 52.19750....$$

ג.

$$f(x)-P_n(x)=R_n(c)=\frac{f^{(n+1)}(c)(x-27)(x-a_1)..(x-a_{n-1})(x-54)}{(n+1)!}\rightarrow$$

$$|R_n(c)|\le\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\cdot(3n-1)(54-27)^{n+1}}{c^{(3n+2)/3}3^{n+1}(n+1)!}\le\frac{2}{3}\frac{5}{6}...\frac{3n-1}{3n}\frac{(54-27)^{n+1}}{3(n+1)c^{(3n+2)/3}}\le\frac{(54-27)^{n+1}}{3(n+1)27^{(3n+2)/3}}$$

$$|R_n(c)|\le\frac{3(27)^{n+1}}{3(n+1)27^{(3n+3)/3}}=\frac{27^{n+1}}{(n+1)27^{n+1}}=\frac{1}{n+1}\le 0.01$$

וברור שעבור n=99 הערכים קטנים כדרוש, כלומר צריך פולינום אינטרפולציה ע״ס 100 נקודות, $a_0=27,a_{100}=54$.

ד.

$$f(x)=\sqrt{x},\ f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},S_1=2+\frac{x-4}{4}=\frac{x+4}{4},T_1=3+\frac{x-9}{6}=\frac{x+9}{6},$$

$$Q_1(x)=2+\frac{(x-4)(3-2)}{9-4}=2+\frac{x-4}{5}=\frac{x+6}{5}$$

ה. כיון שf קעורה, הרי שישרי טיילור הם מעל הגרף, ופולינום האינטרפולציה מתחתיו, ולכן:

$$e_1=\frac{x+4}{4}-\sqrt{x},e_2=\frac{x+9}{6}-\sqrt{x},e_3=\sqrt{x}-\frac{x+6}{5}\rightarrow$$
$$[\sqrt{x}-\frac{x+6}{5}<\frac{x+4}{4}-\sqrt{x}]\wedge[\sqrt{x}-\frac{x+6}{5}<\frac{x+9}{6}-\sqrt{x}]\rightarrow$$
$$[2\sqrt{x}<\frac{x+6}{5}+\frac{x+4}{4}]\wedge[2\sqrt{x}<\frac{x+6}{5}+\frac{x+9}{6}]\rightarrow$$
$$[40\sqrt{x}<4(x+6)+5(x+4)]\wedge[60\sqrt{x}<6(x+6)+5(x+9)]\rightarrow$$
$$[40\sqrt{x}<9x+44]\wedge[60\sqrt{x}<11x+81]\rightarrow$$
$$[1600x<81x^2+792x+1936]\wedge[3600x<121x^2+1782x+6561]\rightarrow$$
$$[0<81x^2-808x+1936]\wedge[0<121x^2-1818x+6561].$$

שרשי המשואה הראשונה הם 4 וגם 484/81, ושרשי המשואה השניה הם 9 וגם 729/121. לכן הקטע הרצוי הוא
[484/81,729/121]≈[5.975,6.024]

תשובה 3

א.

$$f(x)=e^{\sqrt{x}},\ f'(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}},\ f''(x)=\frac{\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}2\sqrt{x}-e^{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}}}{4x}=\frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{4x^{1.5}},$$

$$f'''(x)=\frac{[\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}]4x^{1.5}-6\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{16x^3}=\frac{e^{\sqrt{x}}2x^{1.5}-6\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{16x^3}=$$

$$=\frac{e^{\sqrt{x}}(2x^{1.5}-6x+6\sqrt{x})}{16x^3}=\frac{e^{\sqrt{x}}(x-3\sqrt{x}+3)}{8x^{2.5}},$$

$$f''''(x)=\frac{[\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}(x-3\sqrt{x}+3)+(1-3\frac{1}{2\sqrt{x}})e^{\sqrt{x}}]8x^{2.5}-20x^{1.5}e^{\sqrt{x}}(x-3\sqrt{x}+3)}{64x^5}=$$

$$=\frac{[\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}(x-2\sqrt{x})]8x^{2.5}-20x^{1.5}e^{\sqrt{x}}(x-3\sqrt{x}+3)}{64x^5}=\frac{[4e^{\sqrt{x}}x^{1.5}(x^{1.5}-2x-5x+15\sqrt{x}-15)]}{64x^5}=$$

$$=\frac{4e^{\sqrt{x}}x^{1.5}(x^{1.5}-7x+15\sqrt{x}-15)}{64x^5}=\frac{e^{\sqrt{x}}(x^{1.5}-7x+15\sqrt{x}-15)}{16x^{3.5}}.$$

ולכן, בקטע $[1,4]$.

$$|f(x)|\le e^2,|f'(x)|\le\frac{e^2}{2},|f''(x)|\le\frac{e^2}{32},(x-3\sqrt{x}+3)'=1-\frac{3}{2\sqrt{x}}=0\rightarrow x=9/4$$

$$(x-3\sqrt{x}+3)(1)=1,(x-3\sqrt{x}+3)(4)=1,(x-3\sqrt{x}+3)(9/4)=3/4,\ f'''(x)|\le\frac{e^2 1}{8\cdot 32}=\frac{e^2}{256}.$$

$$(x^{1.5}-7x+15\sqrt{x}-15)'>0,(x^{1.5}-7x+15\sqrt{x}-15)(1)=-6,(x^{1.5}-7x+15\sqrt{x}-15)(4)=-5,$$

$$|f^{(4)}|\le\frac{|-5|e^2}{16\cdot 32}=\frac{e^2 5}{512}$$

ב. $$|R|=|\frac{f'(c)(b-a)^2}{2n}|\le\frac{e^2 3^2}{2\cdot 2n}=\frac{9e^2}{4n}$$

ג. $$|R|=|\frac{f''(c)(b-a)^3}{12n^2}|\le\frac{e^2 27}{384n^2}.$$

ד. $$|R|=|\frac{f''''(c)(b-a)^5}{180n^4}|\le\frac{e^2 5}{512}\frac{343}{180n^4}=\frac{243e^2}{18432n^4}.$$

ה. $$\frac{27e^2}{384n^2} \le \frac{9e^2}{4n1000} \to \frac{108000}{3456} \le n \to 32 \le n.$$

ו.

$$\frac{243e^2}{18432n^4} \le \frac{e^2 27}{1000 \cdot 384n^2} \to \frac{384 \cdot 243000}{27 \cdot 18432} \le n^2 \to \frac{2^7 \cdot 3 \cdot 9000}{2^{11} \cdot 9} = \frac{375}{2} = 187.5 \le n^2 \to 13 \le n$$

תשובה 4

א,ב.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \to x^3 = 2x^2 + x - 2 \to x = \sqrt[3]{2x^2 + x - 2} = g(x),$$
$$g'(x) = \frac{4x+1}{3g^2}, g'(1) = \frac{5}{3}, g'(-1) = \frac{-3}{3}, g'(2) = \frac{9}{12}.$$

לכן 1 דוחה,2 מושכת ומינוס 1 לא ברור.

ג,ד.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \to 2x^2 = x^3 - x + 2 \to x = \sqrt{\frac{x^3 - x + 2}{2}} = g(x),$$
$$g'(x) = \frac{3x^2 - 1}{4g}, g'(1) = \frac{2}{4}, g'(-1) = \frac{-4}{4}, g'(2) = \frac{5}{8}.$$

לכן 1- לא ברור, 2 מושכת ו 1 מושכת עוד יותר חזק.

ה,ו

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1, f' = 3x^2 - 4x - 1, f'' = 6x - 4, f' = 0 \to x = \frac{4 \pm \sqrt{16+12}}{6} \sim 1.55, -0.22,$$
$$f'' > 0 \to x > 0.666, f(2) = -1, f(3) = 7, [a,b] = [2,3], M = f''(3) = 14, m = f'(2) = 3$$

מצאנו את הקטע, כעת נחשב את השגיאה:

$$|x_{n+1}-L|\le \frac{M}{2m}(x_{n+1}-x_n)^2=\frac{14}{6}(x_{n+1}-x_n)^2\le 0.01\to$$

וכעת $$(x_{n+1}-x_n)^2\le \frac{6}{1400}=\frac{3}{700}\sim 0.00428\to |x_{n+1}-x_n|\le 0.0654....$$

נחשב את הסדרה

$$f(x)=x^3-2x^2-x+1,\to g=x-\frac{f}{f'}=x-\frac{x^3-2x^2-x+1,}{3x^2-4x-1}=\frac{2x^3-2x^2-1}{3x^2-4x-1},x_0=3,$$

$$x_1=g(3)=\frac{54-18-1}{27-12-1}=\frac{35}{14}=2.5,x_2=g(2.5)=\frac{2\cdot 15.625-2\cdot 6.25-1}{3\cdot 6.25-4\cdot 2.5-1}=\frac{17.75}{7.75}=\frac{71}{31}\sim 2.290,$$

$$x_3=g(71/31)=\frac{2(71/31)^3-2(71/31)^2-1}{3(71/31)^2-4(71/31)-1}=\frac{2\cdot(71)^3-62\cdot(71)^2-(31)^3}{93\cdot(71)^2-284\cdot(31)^2-(31)^3}=$$

$$=\frac{715822-312542-29791}{468813-272924-29791}=\frac{373489}{166098}\sim 2.24860$$

$$|x_3-x_2|=0.052<0.0654$$

תשובה 6

נביט בפונקציה $f(x)=x\sin(\frac{1}{x})$. זו פונקציה זוגיות ולכן כל עובדה שאפשר לומר על $0<x$, נכונה גם ל$x<0$. לכן מעתה נביט על x ים אי שליליים. אז לפונקציה יש אינסוף שרשים. נבדוק מתי $0<x_0<x_1$.

אז מתקיים $x_1=x_0-\cfrac{x_0\sin(\frac{1}{x_0})}{\sin(\frac{1}{x_0})-\cfrac{\cos(\frac{1}{x_0})}{x_0}}$ ולכן אי השויון $0<x_0<x_1$

שקול ל $\cfrac{x_0\sin(\frac{1}{x_0})}{\sin(\frac{1}{x_0})-\cfrac{\cos(\frac{1}{x_0})}{x_0}}<0$ ולכן ל

ולכן $[\sin(\frac{1}{x_0})-\cfrac{\cos(\frac{1}{x_0})}{x_0}<0<x_0\sin(\frac{1}{x_0})]\vee[x_0\sin(\frac{1}{x_0})<0<\sin(\frac{1}{x_0})-\cfrac{\cos(\frac{1}{x_0})}{x_0}]$

ל $[x_0\sin(\frac{1}{x_0})-\cos(\frac{1}{x_0})<0<x_0\sin(\frac{1}{x_0})]\vee[x_0\sin(\frac{1}{x_0})<0<x_0\sin(\frac{1}{x_0})-\cos(\frac{1}{x_0})]$

כלומר ל $[0 < x_0 \sin(\frac{1}{x_0}) < \cos(\frac{1}{x_0})] \vee [\cos(\frac{1}{x_0}) < x_0 \sin(\frac{1}{x_0}) < 0]$ ולכן

$[0 < \tan(\frac{1}{x_0}) < \frac{1}{x_0}] \vee [0 < \tan(\frac{1}{x_0}) < \frac{1}{x_0}] = [0 < \tan(\frac{1}{x_0}) < \frac{1}{x_0}]$ נסמן $u = \frac{1}{x_0}$

ולכן $0 < \tan(u) < u$. נביט באי השויון הקודם עבור 0<u. הוא מתקיים עבור אינסוף קטעים ולבטח מתקיים כאשר tan שלילית, ולכן נקבל שהוא מתקיים לפחות עבור $u \in [(k - \frac{1}{2})\pi, k\pi]$ שאז tan שלילית. לכן עבור $x_0 \in [\frac{2}{2k\pi}, \frac{2}{(2k-1)\pi}]$ מתקיים אי השויון $0 < x_0 < x_1$. לכן עבור הפתרון a=0 של המשואה, יש אינסוף קטעים הולכים ומתקרבים לפתרון, כך שאם x_0 נבחר בהם, x_1 יותר רחוק מהפתרון.