הקורס אנליזה נומרית
מורה: גיורא דולה. מכללת נתניה סמסטר סתו התשס"ב

הקורס הוא קורס שבין מתמטיקה ומדעי המחשב. מצד אחד נעזרים במחשבים כדי לבצע חשובים מתמטיים, ומצד שני משתמשים במתמטיקה כדי להבין יותר לעומק מה שהולך במחשב. נשתמש במתמטיקה שנלמדה בשנה א, אינפי, אלגברה לינארית ודיסקרטית ונכתב תכניות ב- C.

נבין יותר טוב דברים אלו תוך כדי למודם.

הקורס יעקוב אחר הספר : חשוב נומרי של האוניברסיטה הפתוחה. נשתמש בספר לא בהכרח לפי הסדר אלא לפי הצרכים. ספר מומלץ נוסף:

Elementary Numerical Analysis: An algorythmic approach by S.D. Conte and Carl de Boore.

ציון המבחן ירכב משקלול של 80% המבחן הסופי ו-20%- עבודות בית. העבודות תנתנה כל שבוע תבדקנה ע"י בודקים וינתן להן ציון. מבין העבודות ילקחו כל הציונים למעט הרע ביותר, והממוצע שלהן יחושב ויהיה ציון עבודות הבית. אין להגיש עבודה באחור אלא באשור שלי מראש בכתב. אפשר להגיש עבודה בזוגות. לשעורי הבית יפורסמו פתרונות.

יתכנו שנויים בכל ההנחיות הללו באם יוצר צורך בכך. אם יוצר כזה שנוי אשתדל להודיע עליו בהקדם האפשרי.

חומר הקורס:

1.אינטרפולציה (פרק 5 בספר חשוב נומרי).

2.אינטגרציה (וגזירה) נומרית (פרק 7).

3.פתרון נומרי של משואות.

אני מאחל לכם הצלחה בקורס.

פרק ראשון: אינטרפולציה.

סעיף ראשון: חזרה על נוסחת טיילור עם שארית לגרנז.

למדנו בקורס באינפי את נוסחת טיילור עם שארית.

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+(f''(a)h^2)/2+\ldots+(f^{(n)}(a)h^n)/n!+R_n(a,h)$$

כאשר $R_n(a,h)$ היא השארית של פתוח טיילור וקימות לה מספר נוסחאות,
למשל נוסחת השארית של Lagrange, (שם שיופיע הרבה בנושא הקרוב).

$$R_n(a,h)=\frac{f^{(n+1)}(c)h^{n+1}}{(n+1)!}$$

וכאשר c היא נקודת בינים בין a ובין a+h.

דוגמא 1. נביט בפונקציה $f(x)=e^x$. כמה נקודות על גרף זה באמת ידועות?
לכאורה ידועות הנקודות $(0,1)$, $(1,e)$, $(2,e^2)$,
$(\ln 3,3)$ $(\ln 2,2)$, $(-1,e^{-1})$, $(3, e^3)$,
אבל אם נזכר כי מספר אירציונלי ידוע רק בקרוב, כי כל פתוח עשרוני של
מספר אירציונלי הוא קרוב, הרי שהנקודה היחידה

הידועה על הגרף בדיוק מוחלט היא $(0,1)$. ובנקודה זו ידוע כי:

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots=1$$

ולכן אם נציב את הנתונים עבור $a=0,h=h$ נקבל את הנוסחא:

$$f(h)=f(0+h)=1+h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3!}+\cdots+R_n(h)$$

וידוע כי :

$$\left|R_n(h)\right|=\frac{e^c h^{n+1}}{(n+1)!}=K\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\to 0, n\to\infty$$

כלומר השארית שואפת ל- 0 , ולכן הבטוי של טור טיילור שואף ל e^h לכל h.
בדרך זו אפשר לתכנת מחשב או מחשבון לבצע חשובים.

הערכת מספר האיברים עבור דיוק.

נניח כי אנו רוצים לחשב את המספר e. זהו ערך הפונקציה בנקודה h=1. מהו מספר המחוברים שנקח כדי לקבל דיוק של אלפית? נשים לב כי $f^{(n+1)}(c)$ חסום בין $e^0=1$ ובין $e^1=e<3$. לכן נקבל כי:

$$\frac{1}{(n+1)!} < R_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}$$

כלומר עבור n=6 השגיאה תקטן מ-אלפית. הערך המקורב ל- e הוא

$1+1+1/2+1/6+1/24+1/120+1/720=1957/720=2.7180555555$

דוגמה 2
F(x)=sqrt(x), a=4, a+h=5

נביט על $f(x)=\sqrt{x}$. כדי לכתב את טור טיילור שלה יש לגזור את f מספר פעמים. אז $f'=(1/2)x^{-(1/2)}$, $f''=(-1/4)x^{-(3/2)}$, $f'''=(3/8)x^{-(5/2)}$, $f^{(4)}=(-15/16)x^{-(7/2)}$, $f^{(5)}=(105/32)x^{-(9/2)}$. מתוך זה ננסה לנחש נוסחה עבור $f^{(n)}$. ברור כי יש שנוי סימן של $\pm$, ונוסחה המבטאת את הבטוי היא $(-1)^{n+1}$. בנוסף, יש במכנה חזקה של 2 שהיא 2^n, ובנוסף, יש במכנה חזקה של x, $x^{-(2n-1)/2}$. נותר בטוי מספרי במונה שיסומן m שאותו נותר לבטא כפונקציה של n. נרשום טבלת ערכים:

n=2, m=1

n=3, m=1x3
n=4, m=1x3x5
n=5, m=1x3x5x7
n=6, m=1x3x5x7x9
ראשית ננסה לבטא את המספר האחרון בכל מכפלה כפונקציה של n,
ונשים לב שזהו המספר 2n-3, וכעת ננסה להביט על m(6).

M(6)=1x3x5x7x9=(1x2x3x4x5x6x7x8x9)/(2x4x6x8)=
(9!)/(1x2x2x2x3x2x4x2)=(9!)/(2^4x(4!))

עוד נשים לב כי 4=6-2=n-2 נקבל כי:$m(n)=(2n-3)!/((n-2)!x2^{n-2})$ ו-,

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}(2n-3)!}{(n-2)!\times 2^{n-2}\times 2^n\times x^{\frac{2n-1}{2}}}=\frac{(-1)^{n+1}(2n-3)!}{2^{2n-2}\times(\sqrt{x})^{2n-1}\times(n-2)!}$$

ולכן נוכל לבטא את נוסחת טיילור עם שארית לגרנז:

$$\sqrt{5}=\sqrt{4}+\frac{1}{2\sqrt{4}}\times 1-\frac{1}{4\sqrt{4}^3}\times 1^2\times\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}(2n-3)!}{2^{2n-2}\times(n-2)!\times\sqrt{4}^{2n-1}}\times 1^n\times\frac{1}{n!}+R_n$$

נקבל את נוסחת השארית של לגרנז ע"י הצבת n+1 במקום n במחובר האחרון:

$$R_n=\frac{(-1)^n(2n-1)!}{2^{2n}\times(n-1)!\times(n+1)!\times\sqrt{c}^{2n+1}}$$

כעת רוצים לקבל בטוי בלי c. ידוע כי $a<c<a+h$ או $4<c<5$ או

ע"י הוצאת שרש $2<\sqrt{c}<\sqrt{5}$. נפעיל את הפונקציה אחד חלקי

ונקבל $(1/\sqrt{5})<(1/\sqrt{c})<(1/2)$, ולכן
$(1/\sqrt{5})^{(2n+1)}<(1/\sqrt{c})^{(2n+1)}<(1/2)^{(2n+1)}$. כיון שרוצים למצוא חסם הגדול מ R_n, נשתמש בחלק הימני ונקבל כי

$$|R_n| = \frac{(2n-1)!}{2^{2n}\times(n-1)!\times(n+1)!\times\sqrt{c}^{\,2n+1}} \le \frac{(2n-1)!}{2^{2n}\times(n-1)!\times(n+1)!\times 2^{2n+1}}$$

$$= \frac{(2n-1)!}{2^{4n+1}\times(n-1)!\times(n+1)!} = \frac{(2n-1)!}{2^{2n+1}\times 2^{n-1}\times(n-1)!\times 2^{n+1}\times(n+1)!}$$

$$= \frac{(2n-1)!}{2^{2n+1}\times(1\times 2)\times(2\times 2)\cdots(2\times(n-1))\times(1\times 2)\times(2\times 2)\cdots(2\times(n+1))} =$$

$$= \frac{(2n-1)!}{2^{2n+1}\times 2\times 4\cdots(2n-2)\times 2\times 4\cdots(2n+2)} \le$$

$$\frac{(2n-1)!}{2^{2n+1}\times 2\times 4\cdots(2n-2)\times 1\times 3\cdots(2n-1)\times(2n+2)}$$

$$= \frac{(2n-1)!}{2^{2n+1}\times(2n+2)\times(2n-1)!} = \frac{1}{2^{2n+1}\times(2n+2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

לכן הגבול של R_n הוא 0 ולכן לכל $0<\varepsilon$, יש N_0 כך שלכל $n>N_0$

מתקים כי $1/(2^{(2n+1)}(2n+2))<\varepsilon$. כיון שהסדרה האחרונה היא

מונוטונית יורדת, מספיק שנמצא את המקום הראשון ששם

מתקים אי השויון, וזהו עבור אלפית $n=3$.

תרגיל 1
שעורי בית להגשה בכתב לעוד שבוע:

בכל אחת מהשאלות הבאות נתונות: פונקציה f, נקודה a ונקודה h. עבור כל מקרה חשב את פתוח טיילור עבור f(a+h), את נוסחת השארית של לגרנז, וכמה איברים יש לחבר כדי למצא את הערך ברמת דיוק של אלפית.

F(x)=ln(x), a=1, a+h=1.5

F(x)=sin(x), a=0, a+h=1.

F(x)=cos(x), a=0, a+h=1.

סעיף ב: אינטרפולציה:

הרעיון בבסיס האינטרפולציה דומה לרעיון של טיילור, לחשב את הפונקציה על סמך נתונים חלקיים. ההבדל הוא שהנתונים החלקיים לא חיבים להיות מרוכזים באותה נקודה.

דוגמא 2 נתונים שני מספרים ממשיים שונים a, b וידוע כי הפונקציה המקורית עוברת דרך (a,f(a)), (b,f(b)).

מה נוכל לשחזר מ- f? ידוע כי "דרך שתי נקודות עובר רק קו ישר אחד" (שיר בבצוע שלמה ארצי).

מהו הישר היחיד העובר דרך נקודות אלו? נסמנו y=mx+n ונציב בו את הנתונים: נקבל מערכת לינארית 2x2

$$\left\{\begin{matrix} f(a) = ma + n \\ f(b) = mb + n \end{matrix}\right\}$$

אותה נפתור ונקבל

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, n = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a},$$
$$y = \frac{(f(b) - f(a))x + bf(a) - af(b)}{b - a}$$

$$y = \frac{(f(b) - f(a))x + bf(a) - af(a) + af(a) - af(b)}{b-a} =$$
$$f(a) + \frac{(x-a)(f(b) - f(a))}{b-a}$$

או, נוכל לחשב עוד קצת:

לישר זה קוראים ישר האינטרפולציה של f הנקבע על ידי (a,f(a)) ו-(b,f(b)).

21-10-2001-30

הערה: קשר בין ישר האינרפולציה ופתוח טיילור מסדר ראשון.

דוגמא 3

נניח כי הפונקציה הלא ידועה היא $f(x)=x^2$, וכי $a=1$, $b_n=1+1/n$. אז נקבל סדרת ישרי אינטרפולציה:

$$y_n = 1 + (x-1)\frac{(1+\frac{1}{n})^2 - 1}{\frac{1}{n}} = 1 + (x-1)(2 + \frac{1}{n})$$
$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 1 + 2(x-1)$$

29-10-2001-10

כלומר ישרי האינטרפולציה שואפים לישר המשיק (פולינום טיילור מסדר 1) בנקודה $a=1$.

עובדה זו נוכל להכליל כדלהלן: נביט על $b_n=a+h_n$ ונניח כי a קבוע. נקבל סדרת ישרים

$$y_n = f(a)+(x-a)\frac{f(a+h_n)-f(a)}{h_n}$$

נניח כעת כי $\lim h_n=0$ כאשר n שואף לאינסוף. אז הגבול של המנה בבטוי הקודם הוא $f'(a)$ כלומר הגבול של ישרי האינטרפולציה הוא הישר המשיק ל-f בהנחה והוא קים, כלומר, פולינום טיילור מסדר ראשון הוא גבול של ישרי אינטרפולציה.

דוגמא 4 נתון כי עוברת דרך הנקודות (0,1),(1,2),(2,5) . האם קים פולינום אשר עובר באותן נקודות?

נניח כי ישנה פרבולה העוברת דרך שלש נקודות אלו. משואתה היא $y=cx^2+bx+a$. נציב בה את שלש הנקודות ונקבל מערכת לינארית בשלשה משתנים: a,b,c.

$$\begin{Bmatrix} 1= f(0)=c0^2+b0+a \\ 2= f(1)=c1^2+b1+a \\ 5= f(2)=c2^2+b2+a \end{Bmatrix}$$

ופתרונה: a=1, b=0, c=1. לכן הפרבולה היא $y=x^2+1$.

דוגמה 5   נתון כי פונקציה מסוימת עוברת דרך הנקודות (q,f(q)), (r,f(r)), (s,f(s)). איך אפשר מנקודות אלו לשחזר את f בהנחה כי הללו נקודות שונות?

נניח כי ישנה פרבולה העוברת דרך שלש נקודות אלו. משואתה היא $y=cx^2+bx+a$. נציב בה את שלש הנקודות ונקבל מערכת לינארית בשלשה משתנים: a,b,c.

$$\left\{\begin{array}{l} f(q) = cq^2 + bq + a \\ f(r) = cr^2 + br + a \\ f(s) = cs^2 + bs + a \end{array}\right\}$$

21-10-2001-20
28-10-2001-30

נחסר משואות ונקבל:

$$\left\{\begin{array}{l} f(q) - f(r) = c(q^2 - r^2) + b(q - r) \\ f(q) - f(s) = c(q^2 - s^2) + b(q - s) \end{array}\right\}$$

$$c=\frac{f(q)-f(r)}{(q-r)(r-s)}-\frac{f(q)-f(s)}{(q-s)(r-s)}=$$

$$\frac{f(q)(r-s)-f(r)(q-s)+f(s)(q-r)}{(q-r)(q-s)(r-s)}$$

נחלק כל משואה במקדם של bונקבל מערכת פשוטה יותר:

$$\begin{cases}\dfrac{\left(f(q)-f(r)\right)}{q-r}=c(q+r)+b\\[2ex]\dfrac{f(q)-f(s))}{q-s}=c(q+s)+b\end{cases}$$

נחסר בין שתי השורות, נחלק ב- r-s ונקבל את המקדמים:

$$b=\frac{(q+r)(f(q)-f(s))}{(q-s)(r-s)}-\frac{(q+s)(f(q)-f(r))}{(q-r)(r-s)}=$$

$$\frac{-f(q)(r^2-s^2)+f(r)(q^2-s^2)-f(s)(q^2-r^2)}{(q-r)(q-s)(r-s)}$$

$$a=\frac{rs(r-s)f(q)-qs(q-s)f(r)+qr(q-r)f(s)}{(q-r)(q-s)(r-s)}$$

ולכן נקבל את התשובה:

$$f(x)=cx^2+bx+a=$$

$$\frac{f(q)(r-s)-f(r)(q-s)+f(s)(q-r)}{(q-r)(q-s)(r-s)}x^2+$$

$$\frac{-f(q)(r^2-s^2)+f(r)(q^2-s^2)-f(s)(q^2-r^2)}{(q-r)(q-s)(r-s)}x+$$

$$\frac{rs(r-s)f(q)-qs(q-s)f(r)+qr(q-r)f(s)}{(q-r)(q-s)(r-s)}$$

ולכן:

$$f(x)=\frac{1}{(q-r)(q-s)(r-s)}$$
$$[f(q)((r-s)x^2-(r^2-s^2)x+rs(r-s))+$$
$$f(r)(-(q-s)x^2+(q^2-s^2)x-qs(q-s))+$$
$$f(s)((q-r)x^2-(q^2-r^2)x+qr(q-r))$$

ולכן

$$f(x)=\frac{1}{(q-r)(q-s)(r-s)}$$
$$(r-s)f(q)(x^2-(r+s)x+rs)+$$
$$-(q-s)f(r)(x^2-(q+s)x+qs)+$$
$$(q-r)f(s)(x^2-(q+r)x+qr)$$

המשפט הבא הוא סכום של הדוגמאות הקודמות. כדי לנסח אותו נצטרך להשתמש בסימונים. נניח כי נתונות נקודות $x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n$ ורשימת ערכיהם על-ידי
f $f(x_0),\ldots,f(x_n)$, ואנו שואלים האם ניתן לבנות על סמך נקודות אלו פונקציה העוברת דרכן. הדוגמאות הקודמות מתאימות למקרים $n=1,2$.

משפט פולינום האינטרפולציה.

קימת פונקציה p בעלת התכונות הבאות.

1 . p עוברת בכל הנקודות הקודמות, כלומר לכל i, $p(x_i)=f(x_i)$.

2 . p היא פולינום שדרגתו קטנה או שוה ל-n.

3 . p היא יחידה בעלת התכונות הקודמות.

פונקציה p זו קרויה פולינום האינטרפולציה של הנקודות $(x_0,f(x_0)), \ldots(x_n,f(x_n))$.

22-10-2001-01

דוגמה 6

נתונות הנקודות $(0,1),(1,4),(2,15),(3,40)$. מצא את פולינום האינטרפולציה שלו:

תשובה: כיון שיש 4 נקודות, מעלת פולינום האינטרפולציה קטנה או שוה ל- 3 , כלומר $y=dx^3+cx^2+bx+a$. נציב ונקבל:

$$\begin{cases} 1= f(0)=d0^3+c0^2+b0+a \\ 4= f(1)=d1^3+c1^2+b1+a \\ 15= f(2)=d2^3+c2^2+b2+a \\ 40= f(3)=d3^3+c3^2+b3+a \end{cases}$$

לכן $a=1$. ונקבל מערכת 3X3 :

$$\begin{cases} 3 = d + c + b \\ 14 = 8d + 4c + 2b \\ 39 = 27d + 9c + 3b \end{cases}$$

נביט על $S3-3S1 \rightarrow S3$, $S2-2S1 \rightarrow S1$ ונקבל:

$$\begin{cases} 8 = 6d + 2c \\ 30 = 24d + 6c \end{cases}$$

ויוצא כי $a=b=c=d=1$ כלומר $y=x^3+x^2+x+1$.

28-10-2001-02

תרגיל 2
תרגיל בית להגשה בכתב בשבוע הבא
הבט בנקודות (1,1), (0,0) (-1,-1). הצב בדוגמא 5. חשב את פולינום האינטרפולציה. השווה אותו לפולינומים x^3 ו- x^5 . האם אין סתירה ליחידות פולינום האינטרפולציה ?

הוכחת משפט האינטרפולציה:

קיום פולינום p ממעלה קטנה או שוה ל- n, פרושו שישנם n+1 מקדמים ממשיים $a_0, a_1, \ldots, a_n$, כך ש $p(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$. נציב את n+1 הנקודות ונקבל מערכת לינארית $(n+1)x(n+1)$.

$$\begin{Bmatrix} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n {x_0}^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n {x_1}^n = f(x_1) \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n {x_n}^n = f(x_n) \end{Bmatrix}$$

קיום פולינום יחיד ממעלה קטנה או שוה n פרושו שמטריצת המקדמים של המערכת הקודמת, הפיכה. נסמן:

$$vdm = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & {x_0}^n \\ 1 & x_1 & \cdots & {x_1}^n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & {x_n}^n \end{pmatrix}$$

דוגמא סס

ון דר מונדה 2x2

נביט על $vdm(x_0,x_1)$. זהו הדטרמיננט של המטריצה הבאה:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{pmatrix}$$

וידוע כי הדטרמיננט הוא $(x_1 - x_0)$.

דוגמא סס

ון דר מונדה 3x3

נביט על $vdm(x_0,x_1,x_2)$. זהו הדטרמיננט של המטריצה הבאה:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^{\,2} \\ 1 & x_1 & x_1^{\,2} \\ 1 & x_2 & x_2^{\,2} \end{pmatrix}$$

נבצע את הפעולות S3-S1→S3 ,S2-S1→S2 אשר אינן משנות את

$$\begin{matrix} 1 & x_0 & x_0^{\,2} \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1^{\,2} - x_0^{\,2} \\ 0 & x_2 - x_0 & x_2^{\,2} - x_0^{\,2} \end{matrix}$$

ערך הדטרמיננט, ונקבל את המטריצה:

אם נפתח לפי עמודה ראשונה, נקבל כי הדטרמיננט הוא של

המטריצה 2x2, שממנה אפשר להוציא גורם משותף מכל שורה

ונקבל כי.

$$(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)\begin{pmatrix} 1 & x_1 + x_0 \\ 1 & x_2 + x_0 \end{pmatrix}$$

כעת נבצע את הפעולה על העמודות אשר אינה משנה את הערך

של הדטרמיננט $A2 - x_0A1 \rightarrow A2$. נקבל כי הדטרמיננט הוא:

$(x_1 - x_0)\ (x_2 - x_0)\ (x_2 - x_1)$.

דוגמא סס

ון דר מונדה 4x4

נביט על $vdm(x_0, x_1, x_2, x_3)$. זהו הדטרמיננט של המטריצה הבאה:

$$\begin{matrix} 1 & x_0 & x_0^{\ 2} & x_0^{\ 3} \\ 1 & x_1 & x_1^{\ 2} & x_1^{\ 3} \\ 1 & x_2 & x_2^{\ 2} & x_2^{\ 3} \\ 1 & x_3 & x_3^{\ 2} & x_3^{\ 3} \end{matrix}$$

נבצע את הפעולות $S2-S1 \rightarrow S2,\ S3-S1 \rightarrow S3,\ S4-S1 \rightarrow S4$

אשר אינן משנות את הדטרמיננט. נקבל את

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & {x_0}^2 & {x_0}^3 \\ 0 & x_1 - x_0 & {x_1}^2 - {x_0}^2 & {x_1}^3 - {x_0}^3 \\ 0 & x_2 - x_0 & {x_2}^2 - {x_0}^2 & {x_2}^3 - {x_0}^3 \\ 0 & x_3 - x_0 & {x_3}^2 - {x_0}^2 & {x_3}^3 - {x_0}^3 \end{pmatrix}$$

נפתח לפי עמודה שמאלית, נוציא קבועים מכל שורה ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 + x_0 & {x_1}^2 + x_0 x_1 + {x_0}^2 \\ 1 & x_2 + x_0 & {x_2}^2 + x_0 x_2 + {x_0}^2 \\ 1 & x_3 + x_0 & {x_3}^2 + x_0 x_2 + {x_0}^2 \end{pmatrix}$$

נשים לב כי $A3\text{-}x_0A1 \rightarrow A3$ יהפך את העמודה הימנית לעמודה

של מטריצת ון דר מונדה. כנ"ל $A2\text{-}x_0A1 \rightarrow A2$ יהפך את העמודה

האמצעית לרצויה.

במקרה הכללי זוהי מטריצה $(n+1)X(n+1)$ הקרויה מטריצת ון-דר-מונדה Van-Der-Moonde והוכחת המשפט שקולה להוכחה כי vdm הפיכה או כי הדטרמינטט שלה שונה מ- 0 . נחשב את det(vdm) על ידי פעולות בין השורות והעמודות אשר אינן משנות את הערך של הדטרמיננט.

נחסר שורה שניה פחות ראשונה ואת שורת התוצאה נשים בשורה השניה.
נסמן פעולה זו בסימון $S2\text{-}S1 \rightarrow S2$ וכן נבצע את $S3\text{-}S1 \rightarrow S3$
.... $Sn\text{-}S1 \rightarrow Sn$. נקבל מטריצה חדשה אשר יש לה אותו דטרמיננט:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0{}^n \\ 0 & x_1 - x_0 & \cdots & x_1{}^n - x_0{}^n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & x_n - x_0 & \cdots & x_n{}^n - x_0{}^n \end{pmatrix}$$

כעת נפתח את הדטרמיננט לפי עמודה ראשונה ונקבל:

$$\det(vdm) = \det\begin{pmatrix} x_1 - x_0 & \cdots & x_1{}^x - x_0{}^n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_n - x_0 & \cdots & x_n{}^n - x_0{}^n \end{pmatrix}$$

כעת נוציא מכל שורה קבוע: מהשורה הראשונה x_1-x_0 ומהאחרונה x_n-x_0 ונקבל:

$$\det(vdm) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)\cdots(x_n - x_0)$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & \cdots & x_1{}^{x-1} + x_1{}^{n-2}x_0 + \cdots x_0{}^{n-1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \cdots & x_n{}^{n-1} + x_n{}^{n-2}x_0 + \cdots x_0{}^{n-1} \end{pmatrix}$$

כעת נחשב את הדטרמיננט של המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1+x_0 & \cdots & x_1^{n-1}+x_1^{n-2}x_0+\cdots+x_0^{n-1} \\ 1 & x_2+x_0 & \cdots & x_2^{n-1}+x_2^{n-2}x_0+\cdots+x_0^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \\ 1 & x_n+x_0 & \cdots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2}x_0+\cdots+x_0^{n-1} \end{pmatrix}$$

נפעל פעולות בין העמודות A_n-$x_0A_{n-1}\rightarrow A_n$, A_1-$x_0A_0\rightarrow A_1$ ונקבל

כי המטריצה הקטנה יותר היא:

$$m=\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

המטריצה הקטנה יותר היא עצמה מטריצת vdm. ולכן אם נסמן את מטריצת vdm על המשתנים $x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n$ בסימון $vdm(x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n)$ הוכחנו את הקשר הבא:

$$\det(vdm(x_0 < x_1 < \cdots < x_n)) =$$
$$(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)\cdots(x_n - x_0)\det(vdm(x_1 < \cdots < x_n))$$

נשתמש בסימון של האות $\prod$ אשר מסמנת מכפלה, והוכחנו באינדוקציה את המשפט הבא:

משפט דטרמיננט של מטריצת $vdm(x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n)$

$$\det(vdm(x_0 < x_1 < \cdots < x_n)) = \prod_{0\le i< j\le n}(x_j - x_i)$$

ולכן ביחוד, כיון ש- לכל j, i , נתון כי $x_i-x_j \neq 0$ לכן $\det(vdm(x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n)) \neq 0$

ולכן הוכחנו את משפט פולינום האינטרפולציה.

תרגיל 3
תרגיל בית להגשה בכתב בשבוע הבא:

מצא את פולינום האינטרפולציה אשר עובר בנקודות ,(0,1), (1,2) .(2,5),(3,11)

שיטת Lagrange לחשוב פולינומי אינרפולציה

השיטה שאנו יודעים כעת לחשוב פולינומי האינטרפולציה כרוכה בפתרון מערכת משואות $(n+1)X(n+1)$. מעבר לכך שיש טרחה כחשוב המטריצה ההפוכה, עוד נלמד בעתיד שהרבה פעולות חשוב, והפוך מטריצות ביניהן, יכול להיות כרוך בקיום שגיאות נומריות.

יש יתרון לנוסחה סגורה המאפשרת לחשב את פולינום האינטרפולציה בצורה מידית.

נוסחה כזו מצא Lagrange. נדגים את הנוסחה במספר מקרים פרטיים:

דוגמא 7

מצא את פולינום האינטרפולציה אשר עובר בנקודות (0,1), (1,0).

תשובה: נביט על $(x-1)/(-1)=1-x$.

דוגמא 8

מצא את פולינום האינטרפולציה אשר עובר בנקודות (a,1), (b,0).

תשובה: נביט על $(x-b)/(a-b)$ ונשים לב כי דוגמה זו מכלילה את הקודמת.

דוגמא 9

מצא את פולינום האינטרפולציה אשר עובר בנקודות (a,1), (b,0),(c,0).

תשובה: נביט על $(x-b)(x-c)/(a-b)(a-c)$.

דוגמא 10

מצא את פולינום האינטרפולציה אשר עובר בנקודות $(x_0,1)$, $(x_1,0),\ldots,(x_n,0)$.

תשובה: נביט על

$$p_0(x) = \frac{\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)}{\prod_{i=1}^{n}(x_0 - x_i)}$$

פתרנו את הבעיה למקרה שאחד ה- x- ים הוא 1 והשאר הם 0 . המקרה הכללי נובע בקלות. נניח כי נתונות נקודות $x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n$ ורשימת ערכיהם על-ידי f $f(x_0),\ldots,f(x_n)$,

ולכל j , $0\le j\le n$ נגדיר

$$p_j(x)=\frac{\prod_{i=0,i\neq j}^{n}(x-x_i)}{\prod_{i=0,i\neq j}^{n}(x_j-x_i)}$$

4-11-2001-01-02-03

דוגמה

מצא את פולינום האינטרפולציה העובר בנקודות (3,7),(7,8),(8,9).

תשובה

נסמן $x_0=3,\ x_1=7,\ x_2=8$. אז:

$$p_0=\frac{(x-7)(x-8)}{(3-7)(3-8)}=\frac{x^2-15x+56}{20}$$

וכן:

$$p_1 = \frac{(x-3)(x-8)}{(7-3)(7-8)} = \frac{x^2 - 11x + 24}{-4}$$

וכן:

$$p_2 = \frac{(x-3)(x-7)}{(8-3)(8-7)} = \frac{x^2 - 10x + 21}{5}$$

ואז הפתרון הוא:

$$7p_0 + 8p_1 + 9p_2 = 7\left(\frac{x^2 - 15x + 56}{20}\right) + 8\left(\frac{x^2 - 11x + 24}{-4}\right)$$

$$+9\left(\frac{x^2 - 10x + 21}{5}\right) =$$

$$\frac{(7 - 40 + 36)x^2 + (-105 + 440 - 360) + (392 - 960 + 756)}{20} =$$

$$\frac{3x^2 - 25x + 188}{20}$$

במקרה הכללי הפולינום של הנתונים שווה ל:
$f(x_0)p_0(x)+f(x_1)p_1(x)+\ldots+f(x_n)p_n(x)$.

דוגמה 11: נביט בנקודות $(0,1),(1,0),(2,0)$. מצא את פולינום האינטרפולציה של הנקודות הללו בשלש שיטות שונות.

פתרון 11 א:

נביט בנוסחאות של דוגמה 2 בעמודים 3-4 , ונציב
.q=0,r=1,s=2,f(q)=1,f(r)=f(s)=0

$$c=\frac{f(q)(r-s)-f(r)(q-s)+f(s)(q-r)}{(q-r)(q-s)(r-s)}$$
$$=\frac{1(-1)-0(-2)+0(-1)}{(-1)(-2)(-1)}=\frac{1}{2}$$

$$b=\frac{-f(q)(r^2-s^2)+f(r)(q^2-s^2)-f(s)(q^2-r^2)}{(q-r)(q-s)(r-s)}$$
$$=\frac{-1(-3)+0(-4)-0(-1)}{(-1)(-2)(-1)}=-\frac{3}{2}$$

$$a=\frac{rs(r-s)f(q)-qs(q-s)f(r)+qr(q-r)f(s)}{(q-r)(q-s)(r-s)}$$
$$=\frac{1\cdot 2\cdot(1-2)\cdot 1-0\cdot m-0\cdot n}{(-1)(-2)(-1)}=1$$

כלומר הפולינום הוא $p(x)=(1/2)x^2-(3/2)x+1$. וזהו אכן הפולינום הדרוש.

פתרון 11 ב:

נביט במערכת המשוואות של הוכחת משפט האינטרפולציה עבור $x_0=0,\ x_1=1,$ $x_2=2$ ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0^2 \\ 1 & 1 & 1^1 \\ 1 & 2 & 2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כיון שידוע כי הדטרמיננט שונה מ- 0 , ושיש פתרון יחיד, מספיק לבדק כי $a_0=1,\ a_1=-3/2,\ a_2=1/2$ אכן פותרים את המערכת.

פתרון 11 ג:

נביט על פולינומי Lagrange ונקבל:

$$q = 1\cdot p_0 + 0\cdot p_1 + 0\cdot p_2 = p_0 = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}$$

$$= \frac{x^2-3x+2}{2} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$$

כדרוש.

שארית לגרנז לפולינום האינטרפולציה

ראינו כי פולינום האינטרפולציה הוא, במובן מסוים, הכללה של פולינום טיילור. מסתבר, שקימת נוסחה עבור ההפרש בין הפונקציה המקורית ובין

פולינום האינטרפולציה, ונוסחה זו, נוסחת השארית, מכלילה את נוסחת השארית של לגרנז עבור טור טיילור.

נניח כי נתונות הנקודות $x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n$ ורשימת ערכיהם על-ידי $f(x_0),\ldots,f(x_n)$, ונסמן ב- p את פולינום האינטרפולציה שהם קובעים. אנו רוצים להביט בהפרש הקרוי גם שארית $e(x)=f(x)-p(x)$. נסמן גם סימונים שיעזרו במהלך ההוכחה:

נגדיר את $w(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$. פולינום זה מעלתו $n+1$, ולכן איננו חלק של פולינום האינטרפולציה.

משפט השארית

נניח כי f גזירה בקטע $[x_0,x_n]$ $n+1$ פעמים, וכי נגזרתה ה- $n+1$ -ית רציפה בקטע זה. אז לכל x בקטע, שאיננה שווה לאף נקודה x_i, קימת c_x בקטע כך שמתקיים:

$$e(x)=\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}w(x)=$$

$$\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

דוגמה סס

נביט על $f(x)=\log_2(x)$, ועל $x_0=2,\ x_1=4,\ x_2=8$. אז $f(2)=1,f(4)=2,f(8)=3$, ורוצים לחשב פולינום קרוב על סמך נתונים אלו.

בשלב ראשון נחשב את פולינום האינטרפולציה:

$$p(x) = 1\cdot\frac{(x-4)(x-8)}{(2-4)(2-8)} + 2\frac{(x-2)(x-8)}{(4-2)(4-8)} + 3\frac{(x-2)(x-4)}{(8-2)(8-4)} =$$

$$= \frac{x^2 - 12x + 32}{12} + 2\frac{x^2 - 10x + 16}{-8} + 3\frac{x^2 - 6x + 8}{24} =$$

$$\frac{(2-6+3)x^2 + (-24+60-18)x + (64-96+24)}{24} =$$

$$= \frac{-x^2 + 18x - 8}{24}$$

כעת נבטא את השארית לכל x כך ש- $2\le x\le 8$.

$$e(x) = R(x) = R(f, n, x, x_0, x_1, \cdots, x_n) =$$

$$R(f = \log_2 x, n = 2, x, x_0 = 2, x_1 = 4, x_2 = 8) =$$

$$= \frac{(\log_2 x)'''(c_x)(x-2)(x-4)(x-8)}{3!} =$$

$$\frac{2}{c_x^{\,3}}\cdot\frac{(x-2)(x-4)(x-8)}{3!} =$$

$$\frac{(x-2)(x-4)(x-8)}{3c_x^{\,3}}$$

כעת נשים לב כי אי השויון $2\le c\le 8$ גורר כי $8\le c^3\le 512$ גורר כי

$(1/8)\le(1/c^3)\le(1/512)$ ועובדה זו נציב ב R ונקבל לכל x.

$$\frac{|(x-2)(x-4)(x-8)|}{3\cdot 512} \le |R| \le \frac{|(x-2)(x-4)(x-8)|}{3\cdot 8}$$

ביחוד נקבל כי $\log_2(5)=2.321928095$ וכי $p(5)=57/24=2.375$

והשגיאה היא $f(5)-p(5)=-0.053$. נציב בנוסחה הקודמת ונקבל:

$(5/8)>|R|>(5/512)$. נשים לב כי השגיאה שיצאה בפועל אכן מקימת את אי השויון.

נוכל לבצע חקירה של הפונקציה במונה $(x-8)(x-4)(x-2)$, ולהסיק שיש לה מינימום מוחלט בנקודה $(14+\sqrt{28})/3=6.430$, ובנקודה זו $|f|=16.900$, ולכן לכל x בקטע, מתקים $|R|<(16.9)/24=0.70416$.

הוכחת משפט השארית:

נביט על הבטוי:

$$\frac{f(x)-p(x)}{w(x)}=\frac{e(x)}{w(x)}=q(x)$$

זוהי פונקציה שמוגדרת בקטע, למעט הנקודות $x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n$, שם המכנה מתאפס. היא הפרש ומנה של פונקציות גזירות ברציפות n+1 פעמים בקטע, ולכן גם היא גזירה ברציפות n+1 פעמים בקטע.

נעביר אגפים ונקבל:

$$f(x)-p(x)-q(x)w(x)\equiv 0$$

זוהי זהות המתקבלת עבור כל נקודה בקטע.

תהי נקודה קבועה בקטע, ונביט על הפונקציה :

$$F(t)=f(t)-p(t)-q(x)w(t)$$

גם פונקציה זו היא גזירה ברציפות $n+1$ פעמים בקטע במשתנה שלה t, כיון שהיא סכום הפרש ומכפלות של פונקציות כאלו. לפונקציה F יש $n+2$ נקודות התאפסות בקטע. ראשית, לכל $t=x_i$, מתאפסת כיון ש- $f(x_i)=p(x_i)$ לפי תכונת פולינום האינטרפולציה, ו $w(x_i)=0$ לפי הגדרת w. בנוסף עבור $t=x$, $F(x)=0$ לפי הזהות שלמעלה. לכן יש ל- F $n+2$ נקודות התאפסות שונות. לפי משפט , לכל פונקציה גזירה, בין כל שתי נקודות התאפסות, קימת נקודת התאפסות של הנגזרת. לכן ל- F' יש $n+1$ נקודות התאפסות
שונות. נשתמש במשפט זה שוב. אז ל- F'' יש n נקודות התאפסות שונות, ל- F''' יש $n-1$ נקודות התאפסות שונות, וכדומה. נמשיך כך, כיון ש- F גזירה $n+1$ פעמים, ונקבל כי ל- $F^{(n+1)}$ יש נקודת התאפסות אחת לפחות. נסמן אותה ב- c_x. אז מתקים:

$$F^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-p^{(n+1)}(t)-q(x)w^{(n+1)}(t)$$

כיון ש- $q(x)$ קבוע. כיון ש - p פולינום ממעלה n , מתקים כי $p^{(n+1)}(x)=0$. כיון ש - w פולינום ממעלה $n+1$ ומקדמו המוביל שוה 1 מתקים כי $w^{(n+1)}(x)=(n+1)!$, ולכן נציב את c_x ונקבל:

$$0=F^{(n+1)}(c_x)=f^{(n+1)}(c_x)-0-q(x)(n+1)!$$

או לאחר העברת אגפים:

$$q(x)=\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}$$

$$e(x)=\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}w(x)\Leftrightarrow\frac{e(x)}{w(x)}=q(x)=\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}$$

ונשים לב שזה שקול לטענה שצריך להוכיח:

דוגמא 12

ידוע אודות פונקציה f כי היא מקימת ש- $f(0)=0, f(\Pi/6)=1/2, f(\Pi/2)=1,$ $f(5\Pi/6)=1/2$.

א. חשב את פולינום האינטרפולציה של f.

ב.נתון כי ל- f יש ארבע נגזרות, וכי $f^{(4)}$ חסומה ע"י 1 . הערך את $|p(x)-f(x)|$ עבור כל $0\le x\le 5\Pi/6$.

פתרון

א. נחשב את פולינום לגרנז:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-0)(x-\Pi/6)(x-\Pi/2)}{(5\Pi/6-0)(5\Pi/6-\Pi/6)(5\Pi/6-\Pi/2)}+$$

$$\frac{(x-0)(x-\Pi/6)(x-5\Pi/6)}{(\Pi/2-0)(\Pi/2-\Pi/6)(\Pi/2-5\Pi/6)}$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-0)(x-\Pi/2)(x-5\Pi/6)}{(\Pi/6-0)(\Pi/6-\Pi/2)(\Pi/6-5\Pi/6)}=$$

$$\frac{27x}{10\Pi}\cdot(\frac{x}{\Pi}-\frac{1}{6})\cdot(\frac{x}{\Pi}-\frac{1}{2})$$

$$-\frac{18x}{\Pi}\cdot(\frac{x}{\Pi}-\frac{1}{6})\cdot(\frac{x}{\Pi}-\frac{5}{6})+\frac{27x}{2\Pi}\cdot(\frac{x}{\Pi}-\frac{1}{2})\cdot(\frac{x}{\Pi}-\frac{5}{6})=$$

$$\frac{x}{\Pi}[-(\frac{9}{5})(\frac{x}{\Pi})^2-(\frac{9}{5})(\frac{x}{\Pi})+\frac{67}{20}]$$

ב. נשתמש בנוסחת השארית ונקבל:

$$\left|f(x)-p(x)\right|=\frac{\left|f^4(c)(x-0)(x-\Pi/6)(x-\Pi/2)(x-5\Pi/6)\right|}{4!}$$

עבור כל בטוי נחשב את הערך המקסימלי שהוא יכול לקבל בקטע.

נתון על $f^{(4)}$ כי היא חסומה על ידי 1 בקטע.

כיון שנתון כי x הוא בקטע , אז מתקים אי השויון $0\le x\le 5\Pi/6$, ולכן הבטוי הראשון קטן מ- $5\Pi/6$.

כיון שנתון כי x הוא בקטע , אז מתקים אי השויון
$-\Pi/6\le x-\Pi/6\le 4\Pi/6$, ולכן הבטוי השני קטן מ- $4\Pi/6$
בערכו המוחלט.

כיון שנתון כי x הוא בקטע , אז מתקים אי השויון

$-3\Pi/6\le x-\Pi/2\le 2\Pi/6$, ולכן הבטוי השלישי קטן מ- $3\Pi/6$ בערכו המוחלט.

כיון שנתון כי x הוא בקטע , אז מתקיים אי השויון
$-5\Pi/6\le x-5\Pi/6\le 0$, ולכן הבטוי הרביעי קטן מ- $5\Pi/6$ בערכו המוחלט.
ולכן:

$$\left|f(x)-p(x)\right|\le\frac{1\cdot{}^{5\Pi}\!/_{6}\cdot{}^{2\Pi}\!/_{3}\cdot{}^{5\Pi}\!/_{6}\cdot{}^{\Pi}\!/_{2}}{24}=\frac{25\Pi^4}{2592}=0.93951$$

11-11-2001-02
12-11-2001-01

תרגיל 4
שעורי בית להגשה בכתב בשבוע הבא

נניח שנוסף הנתון כי $f(-\Pi/6)=-1/2$. חשב את פולינום האינטרפולציה ואת השארית כעת.

הערות: א. מיד נלמד את האלגוריתם של נוויל, הקשור בתרגיל זה.

ב. הפונקציה אותה קרבנו היא $f(x)=\sin(x)$.

קשר נוסף בין פולינומי האינטרפולציה ובין פולינומי טיילור

ראינו כי פולינומי האינטרפולציה קובעים את טור טיילור ממעלה ראשונה. נראה כעת כי נוסחת השארית של לגרנז עבור פולינום האינטרפולציה, קובעת את נוסחת שארית לגרנז לפולינום טיילור.

ואכן טיילור הוא המקרה הפרטי שבו $x_0=x_1=x_2=\ldots=x_n$, ולכן נובע כי $w(x)=(x-x_0)^n$, ולכן מתקבל

$$e(x)=\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

כדרוש- שארית לגרנז לטור טיילור.

שיטת נוויל

למדנו איך לחשב את פולינום האינטרפולציה בכמה שיטות שונות

אולם תרגיל 4 להגשה מראה לנו כי יש דברים שעוד לא הבנו.
ברגע שנוסף נתון חדש אודות f, יש לחשב את פולינום האינטרפולציה החדש מההתחלה. שיטת נוויל מאפשרת להשתמש
בפולינומי אינטרפולציה מדרגה נמוכה כדי לחשב פולינום
אינטרפולציה מדרגה גבוהה.

דוגמה 13

I. נתון כי f עוברת בנקודות (0,1),(-1,0). חשב את פולינום

האינטרפולציה שלה.

תשובה: זהו הפולינום p=(x-(-1))/(0-(-1))=x+1.

II. נוסף הנתון כי f עוברת בנקודה (1,0). חשב את פולינום

האינטרפולציה כעת.

תשובה: נחשב קודם את הפולינום של (0,1),(1,0). זהו הפולינום q=(x-1)/(0-1)=1-x. שני הישרים הללו עוברים דרך (0,1), אבל
לכל אחד יש נקודה שהוא לא עובר בה. x+1 לא עובר ב- (1,0)
ו- 1-x לא עובר ב- (-1,0). נשים לב כי ((x-1)p+(x+1)q)/(1-(-1))
הוא הפולינום הרצוי על-ידי הצבת -1,0,1.

דוגמה 14

נתון כי p היא פונקציה אשר עוברת בנקודות $(a,f(a)),(b,f(b))$,
וכי q היא פונקציה אשר עוברת בנקודות $(b,f(b)),(c,f(c))$. הוכח
כי $r=((x-c)p-(x-a)q)/(a-c)$ היא פונקציה אשר עוברת בנקודות
$(a,f(a)),(b,f(b)), (c,f(c))$.

תשובה

נציב ב- r ונקבל:

$r(a)=((a-c)p(a)-(a-a)q(a))/(a-c)=p(a)$

$r(b)=((b-c)p(b)-(b-a)q(b))/(a-c)=((b-c)f(b)-(b-a)f(b))/(a-c)=f(b)$

$r(c)=((c-c)p(c)-(c-a)q(c))/(a-c)=q(c)$

תרגיל 5

שעורי בית להגשה בכתב בשבוע הבא

נתון כי p היא פונקציה אשר עוברת בנקודות $(a,f(a)),(b,f(b)),(c,f(c))$, וכי
q היא פונקציה אשר עוברת בנקודות $(b,f(b)),(c,f(c)),(d,f(d))$. הוכח כי
$r=((x-d)p-(x-a)q)/(a-d)$ היא פונקציה אשר עוברת בנקודות
$(a,f(a)),(b,f(b)), (c,f(c)),(d,f(d))$.

תרגיל 6

שעורי בית להגשה בכתב בשבוע הבא

נתון כי p היא פונקציה אשר עוברת בנקודות $(x_0,f(x_0)),\dots,(x_n,f(x_n))$, וכיq
היא פונקציה אשר עוברת בנקודות $(x_1,f(x_1)),\dots,(x_{n+1},f(x_{n+1}))$.. הוכח כי
$r=((x-x_{n+1})p-(x-x_0)q)/(x_0-x_{n+1})$ היא פונקציה אשר עוברת בנקודות
$(x_0,f(x_0)),\dots,(x_{n+1},f(x_{n+1}))$.

- העקרון העומד בבסיס של תרגילים 5,6 הוא הבסיס של העקרון של שיטת נוויל.

דוגמא 14

I. נתון כי f עוברת דרך הנקודות (0,1),(1,4),(2,15).
מצא את פולינום האינטרפולציה שלו לפי שיטת נוויל.

ב. נוסף הנתון כי f עוברת דרך הנקודה (3,40). חשב פולינום

$$\left(\begin{array}{llll}
0 \quad f=1 & & & \\
 & \dfrac{(x-0)4-(x-1)1}{1-0}=3x+1 & & \\
1 \quad f=4 & & \dfrac{(x-0)(11x-7)-(x-2)(3x+1)}{2-0}=4x^2-x+1 & \\
 & \dfrac{(x-1)15-(x-2)4}{2-1}=11x-7 & & \\
2 \quad f=15 & & &
\end{array}\right)$$

האינטרפולציה המעדכן.

תשובה

א. נכין טבלה עם הנתונים

0	F=1		
		((x-0)4-(x-1)1)/(1-0)=3x+1	
1	F=4		((x-0)(11x-7)-(x-2)(3x+1))/(2-0)=4x^2-x+1
		((x-1)15-(x-2)4)/(2-1)=11x-7	
2	F=15		

$$\begin{pmatrix} 0 & f=1 & & & \\ & & \frac{(x-0)4-(x-1)1}{1-0}=3x+1 & & \\ 1 & f=4 & & \frac{(x-0)(11x-7)-(x-2)(3x+1)}{2-0}=4x^2-x+1 & \\ & & \frac{(x-1)15-(x-2)4}{2-1}=11x-7 & & \\ 2 & f=15 & & \frac{(x-1)(25x-35)-(x-3)(11x-7)}{3-1}=7x^2-10x+7 & \\ & & \frac{(x-2)40-(x-3)15}{3-2}=25x-35 & & \\ 3 & f=40 & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & f=1 & & \\ & & \frac{(x-0)4-(x-1)1}{1-0}=3x+1 & \\ 1 & f=4 & & \frac{(x-0)(11x-7)-(x-2)(3x+1)}{2-0}=4x^2-x+1 \\ & & \frac{(x-1)15-(x-2)4}{2-1}=11x-7 & \\ 2 & f=15 & & \end{pmatrix}$$

ב. וכעת נכין טבלה חדשה עם הנתונים הישנים בתוספת הנקודה החדשה:

ואת הפולינום הסופי נכתב כאן בגלל שאין מקום:

$$p=\frac{(x-0)(7x^2-10x+7)-(x-3)(4x^2-x+1)}{3-0}=x^3+x^2+x+1$$

וזהו פולינום התשובה של דוגמה 6 .

תרגיל 7

שעורי בית להגשה בכתב בשבוע הבא

המשך את הדוגמה הקודמת (14) בהנתן כי f עוברת בנקודה

(4,109). התשובה שאמורים לקבל: $x^4-5x^3+12x^2-5x+1$.

18-11-2001-03

אינטגרציה נומרית

סכומי רימן והמשפט היסודי של החשבון האינטגרלי

נניח כי נתונה פונקציה f, אשר היא רציפה וחיובית בקטע [a,b]. נתון השטח S אשר כלוא בין הקוים הבאים: הגרף של y=f(x) נמצא מעל-S, הקו y=0 נמצא מתחת ל-S, הקו x=a נמצא משמאל ל-S, הקו x=b נמצא מימין ל-S. כדי לחשב את השטח, חלק Riemann את הקטע [a,b] לתת קטעים, ובכל תת קטע הניח שהשטח הוא כמעט מלבן. הוא חשב את גבה המלבן ע"י הערך של f בנקודת בינים, חשב את השטח של תת המלבן, וסכם את שטחי תת המלבנים. לסכום הזה קוראים סכום רימן. אשפר להוכיח כי אם נעשה תהליך של גבול, נקבל ערך גבולי לסכומים. גבול זה הוא השטח.

דוגמא 15

נביט על f(x)=x בקטע [a,b] כלשהו, ונחלק אותו ל- n תת קטעים שוים. אורך כל תת קטע הוא (b-a)/n. נבחר בקטע ה- k –י את נקודת הבינים a+(k-1)(b-a)/n=(k-1)b/n+(n+1-k)a/n. אז נקבל את סכום רימן:

$$\frac{(b-a)}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(a+\frac{(k-1)(b-a)}{n}\right)=(b-a)\cdot a+\frac{(b-a)^2 n(n-1)}{2n^2}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{}(b-a)\cdot a+\frac{(b-a)^2}{2}=(b-a)\cdot\frac{(b+a)}{2}=\frac{b^2-a^2}{2}$$

וקבלנו את התוצאה הרצויה.

18-11-2001-02

19-11-2001-01

תרגיל 8

תרגיל להגשה בכתב עוד שבוע

חזור על התרגיל הקודם, עם בחירה חדשה $f(x)=x^2$. כל שאר הבחירות תהינה זהות.

המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי

נניח כי נתונה f רציפה בקטע [a,b], וכי F היא פונקציה קדומה לה, כלומר מתקיים כי $F`=f$. אז השטח הדרוש הוא $F(b)-F(a)$.

כלומר מציאת הקדומה והצבות מאפשרת לחשב את השטח.

פונקציות אלמנטריות

נזכר בהגדרת פונקציה אלמנטרית. זוהי כל פונקציה אשר היא חבור חסור כפל חלוק הרכבה והפוך של הפונקציות הבאות:

פולינומים, פונקציות מערכיות, פונקציות טריגונומטריות.

ישנה לפונקציות אלו התכונה כי נגזרת של פונקציה אלמנטרית היא כזו, כיון שנגזרת של פולינום היא פולינום, של מעריכית היא כזו ושל טריגונומטרית היא כזו, ובגלל שנגזרת של סכום היא סכום הנגזרות, לפי כלל המכפלה, המנה, השרשרת וההפוך.

אבל, למרות שאינגרל של פולינום הוא פולינום, של מעריכית מעריכית ושל טריגונומטרית היא טריגונומטרית, ואינטגרל של סכום הוא סכום האינטגרלים, הרי שכללי המכפלה והשרשרת באינטגרציה פחות חזקים, ולכן, אינטגרל של פונקציה אלמנטרית הוא לאו דוקא כזה.

לדוגמה, נביט בפונקציה $f(x)=\exp(-x^2/2)$ או $g(x)=\exp(-x^2)$, כאשר $\exp(z)=e^z$. ברור כי אם F היא הקדומה של f, ו- G היא הקדומה של g, אז מתקיים:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}F(\sqrt{2}x)=G(x)$$

לכן אם יש לאחת מהן קדומה אלמנטרית, יש גם לשניה.

אחרי כפל בקבוע f הופכת לפונקצית הפעמון של גאוס בעלת חשיבות רבה בסטטיסטיקה: זוהי פונקצית הצפיפות של ההתפלגות הנורמלית, ו- F, עד כדי כפל בקבוע, היא הטבלה שבה משתמשים לחשובים. באותה צורה התפלגויות t,F,χ^2 בסטטיסטיקה קשורות לפונקציות לא אלמנטריות.

חשוב נומרי של אינטגרלים.

כאשר חשוב על ידי קדומה בלתי אפשרי, נאלצים לפנות לחשוב על ידי סכומי רימן או על ידי שיטות טובות יותר אודותיהן נלמד מיד:

דוגמה

נביט על הפונקציה $y=\exp(x^2)$. נחשב את האינטגרל בין 0 ו- 1 .

נניח כי נחלק את הקטע לתת קטע יחיד, ונקודת בינים 0 . אז סכום רימן הוא $(1-0)x1=1$.

דוגמה

נחלק את הקטע לשני תתי קטעים שוים, ונקודות הבינים תהינה בשמאל. נקבל כי סכום רימן הוא $((1/2)-0)x1+(1-(1/2))x\exp(1/4)$.

נקבל את הערך 1.142012708

שיטת הטרפז

לשיטת סכומי רימן יש גם מגרעת: היא תלויה בבחירת נקודת בינים בכל קטע. בכך היא הופכת מסורבלת יותר. לפעמים בחירת נקודת הבינים מצליחה, ואז המלבן אכן מקרב את תת השטח, אך לפעמים נקודת הבינים מיצגת לא טוב את הקטע. יתרונה של שיטת הטרפז הוא שהיא אינה תלויה בבחירת נקודת בינים, והיא מדויקת לא פחות. הרעיון העקרוני הוא להחליף את השטח של הגרף הכלוא בין $x=a$ ובין $x=b$ על ידי שטח הטרפז שגבהו $b-a$, בעל בסיס אחד $f(a)$ ובסיס שני $f(b)$. שטח טרפז זה הוא $((b-a)(f(b)+f(a))/2$, ושטח זה איננו תלוי בבחירת נקודת בינים. אם נתונה חלוקה של הקטע $[a,b]$, $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, אז שטח כל תת קטע מקורב על ידי טרפז כמקודם, והשטח הכללי יוצא:

$$\frac{(x_1-x_0)(f(x_0)+f(x_1))}{2}+\frac{(x_2-x_1)(f(x_1)+f(x_2))}{2}+\cdots+\frac{(x_n-x_{n-1})(f(x_{n-1})+f(x_n))}{2}$$

זוהי נוסחת שיטת הטרפז: אם נבחר חלוקה שוה של הקטע $h=x_1-x_0=\ldots=x_n-x_{n-1}$ אז נקבל את הנוסחה הבאה לשטח:

$$s=\frac{(1-0)}{2}(f(0)+f(1))=$$

$$\frac{1}{2}(1+e)=1.859140914$$

$$S=\frac{h}{2}((f(x_0)+f(x_1))+(f(x_1)+f(x_2))+\cdots((f(x_{n-1})+f(x_n))=$$

$$\frac{h}{2}(f(x_0)+2f(x_1)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n))$$

דוגמה

חזור על הבעיה הקודמת עם שיטת הטרפז וחלוקת הקטע לתת

קטע יחיד ולשני תתי קטעים:

תשובה

ע"י חלוקה לקטע אחד נקבל:

ע"י חלוקה לשני קטעים נקבל

$$s=\frac{(1-0)/2}{2}(f(0)+2f(1/2)+f(1))=$$

$$\frac{1}{4}(1+2\cdot1.284025417+e)=1.571583165$$

תרגיל בית להגשה בכתב לעוד שבוע

חשב את אותו אינטגרל על ידי שיטת הטרפז תוך חלוקת הקטע ל- 4

25-11-2001-03
הערכת שגיאה

כיון שהקו הישר המחבר את (a,f(a)) עם (b,f(b)) הוא ישר

אינטרפולציה, הרי שאם f גזירה פעמים ברציפות בקטע, נוסחת

השארית מתקימת, ומאפשרת להעריך את f-p בקטע, ולכן גם את

$$\int_a^b (f(x)-p(x))dx$$

בצורה הבאה:

$$e=\int_a^b (f(x)-p(x))dx=\int_a^b \frac{(x-a)(x-b)f''(c_x)}{2}dx$$

כאשר c_x נקודה לא ידועה בקטע.

הנחנו כי f גזירה פעמים ברציפות הרי שהיא חסומה בקטע.

לכן יש שני קבועים כך שמתקים אי השויון לכל נקודה בקטע:

$$m\le f''(x)\le M$$

נשים גם לב כי בקטע [a,b], (x-a)(x-b) היא שלילית ולכן

נקבל אי שויון:

$$\frac{M(x-a)(x-b)}{2}\le f(x)-p(x)\le \frac{m(x-a)(x-b)}{2}$$

$$\int_a^b (x-a)(x-b)dx = \int_{\frac{-(b-a)}{2}}^{\frac{(b-a)}{2}} (t+\frac{b+a}{2}-a)(t+\frac{b+a}{2}-b)dt =$$

$$\int_{\frac{-(b-a)}{2}}^{\frac{(b-a)}{2}} (t+\frac{b-a}{2})(t-\frac{b-a}{2})dt$$

נאנטגרל=(נסכום) בקטע. נשים לב כי כאשר x שיך לקטע [a,b],

אז המשתנה x-(a+b)/2 שיך לקטע [-(b-a)/2,(b-a)/2], ולכן שנוי

המשתנה t=x-(a+b)/2 יתן

נסמן c=(b-a)/2. נקבל

$$I = \int_{-c}^{c} (t+c)(t-c)dt = \int_{-c}^{c} (t^2-c^2)dt =$$

$$2\int_0^c (t^2-c^2)dt = \frac{2t^3}{3} - 2c^2t = \frac{2c^3}{3} - 2c^3 = -\frac{4c^3}{3}$$

26-11-2001-02-01

ולכן:

$$\frac{4m(b-a)^3}{8\cdot 3\cdot 2} \le \int_a^b (f(x)-p(x))dx \le \frac{4M(b-a)^3}{8\cdot 3\cdot 2}$$

$$\frac{m(b-a)^3}{12} \le \int_a^b (f(x)-p(x))dx \le \frac{M(b-a)^3}{12}$$

או

נביט על

$$\frac{12\int_a^b (f(x)-p(x))dx}{(b-a)^3}$$

בטוי זה חסום בין הערכים m ו- M, וגם הפונקציה הרציפה f’’

חסומה בין אותם ערכים. לכן יש ערך אחד לפחות d, בקטע,

כלומר כך ש- a≤d≤b, וכך שמתקיים:

$$f''(d)=\frac{12\cdot\int_a^b (f(x)-p(x))dx}{(b-a)^3}$$

או על ידי העברת אגפים:

$$\int_a^b (f(x)-p(x))dx=\frac{f''(d)(b-a)^3}{12}$$

כעת נניח כי מחלקים את הקטע [a,b] לתת קטעים שוים באורך h,

ובכל קטע משתמשים בקרוב הקודם עם נקודת בינים d_i. נקבל

$$I=\int_a^b (f(x)-p(x))dx=\frac{\sum_{i=1}^{n} f''(d_i)h^3}{12}$$

נזכר כי $h=(b-a)/n$, ולכן נקבל:

$$I = \frac{\sum_{i=1}^{n} f''(d_i)}{n} \cdot \frac{(b-a)h^2}{12}$$

נשתמש בנוסחה זו. ידוע כי כל אחד מהמחוברים חסום בין M ו- m,

ולכן גם הממוצע שלהם. כיון ש- f’’ רציפה, קימת נקודת בינים c

כך ש- $a<c<b$, וכך ש-

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f''(d_i)}{n} = f''(c)$$

נציב זאת ונקבל

$$\int_a^b (f(x) - p(x))dx = \frac{f''(c)(b-a)h^2}{12}$$

וזוהי נוסחת הערכת השגיאה.

דוגמה

עבור $y=\exp(x^2)$, ועבור חלוקת הקטע ל1 או 2 תתי קטעים כמו בדוגמאות הקודמות, הערך את השגיאה של האינטגרל על [0,1]

תשובה

נתון כי $y=\exp(x^2)$, ולכן $y'=2x\exp(x^2)$, $y''=(2+4x^2)\exp(x^2)$, ולכן $y'''=(12x+8x^3)\exp(x^2)$, כלומר כיון ש- y''' חיובית, y'' עולה בקטע וחסומה על ידי ערכיה ב- 0 וב- 1 . $m=y''(0)=2$,

$M=y''(1)=6e$ לכן נכתב את אי השוויונים עבור שני המקרים:

$$0.166=\frac{2(1-0)1^2}{12}\le\int_0^1 e^{(x^2)}dx-1.859\le\frac{6e(1-0)1^2}{12}=1.359$$

$$0.04166=\frac{2(1-0)(1/2)^2}{12}\le\int_0^1 e^{(x^2)}dx-1.571\le\frac{6e(1-0)(1/2)^2}{12}=0.33975$$

תרגיל הביתה להגשה בכתב עוד שבוע

חשב את האינטגרל על ידי חלוקת הקטע ל- 4 תתי קטעים והערך את השגיאה.

דוגמה

נתונה הבעיה של חשוב $\int e^{x^2}dx$, על הקטע [0,1]. נניח כי מחלקים את הקטע ל- n קטעים שוים ומשתמשים בשיטת הטרפז. מהו

n הראשון שיבטיח כי התוצאה קרובה לאינטגרל האמיתי עד כדי אלפית.

תשובה

$$\int_0^1 e^{x^2}dx-(\text{שטח}-\text{טרפזים})=\frac{f''(c)(1-0)}{12}\cdot\frac{(1-0)^2}{n^2}=\frac{f''(c)}{12n^2}$$

ראינו כי החסם 6e נכון עבור f'' בקטע זה, ולכן נקבל:

$$\int_0^1 e^{x^2}dx-(\text{שטח}-\text{טרפזים})\le\frac{e}{2n^2}?\le?\frac{1}{1000}\Leftrightarrow n^2\ge 500e$$

כלומר n>36.

תרגיל בית להגשה בכתב עוד שבוע

חזור על הדוגמה הקודמת עבור הפונקציה בעלת הקדומה הלא

אלמנטרית $y=(e^x)/x$ בקטע [10,11].

שיטת סימפסון

נביט בקטע [a,b], ונחשב את הפרבולה אשר עוברת בנקודות

$(a,f(a)), (b,f(b)),((a+b)/2,f((a+b)/2))$. נציב בדוגמה 5

$q=a, r=(a+b)/2, s=b$ ונקבל

$$p(x)=\frac{1}{(q-r)(q-s)(r-s)}$$

$$(r-s)\,f(q)(x^2-(r+s)x+rs)+$$

$$-(q-s)\,f(r)(x^2-(q+s)x+qs)+$$

$$(q-r)\,f(s)(x^2-(q+r)x+qr)$$

$$=\frac{1}{(a-b)^2}[\,f(a)(2x^2-(a+3b)x+(a+b)b)$$

$$-4\,f(\frac{a+b}{2})(x^2-(a+b)x+ab)+$$

$$f(b)(2x^2-(3a+b)x+(a+b)a)]$$

נבצע אינטגרציה מ- a עד b ונקבל.

$$שטח = \frac{1}{(a-b)^2}[f(a)(2\frac{b^3-a^3}{3} - (a+3b)\frac{b^2-a^2}{2} + (a+b)b(b-a))$$

$$-4f(\frac{a+b}{2})(\frac{b^3-a^3}{3} - (a+b)\frac{b^2-a^2}{2} + ab(b-a)) +$$

$$f(b)(2\frac{b^3-a^3}{3} - (3a+b)\frac{b^2-a^2}{2} + (a+b)a(b-a))] =$$

$$\frac{f(a)}{6(a-b)^2}[4(b^3-a^3) - 3(a+3b)(b^2-a^2) + 6(a+b)b(b-a)] -$$

$$-\frac{4f(\frac{a+b}{2})}{6(a-b)^2}[2(b^3-a^3) - 3(a+b)(b^2-a^2) + 6ab(b-a)] +$$

$$\frac{f(a)}{6(a-b)^2}[4(b^3-a^3) - 3(3a+b)(b^2-a^2) + 6(a+b)b(b-a)] =$$

$$\frac{f(a)}{6(b-a)}[4(b^2+ab+a^2) - 3(a+3b)(b+a) + 6(a+b)b] -$$

$$-\frac{4f(\frac{a+b}{2})}{6(b-a)}[2(b^2+ab+a^2) - 3(a+b)(b+a) + 6ab] +$$

$$+\frac{f(a)}{6(b-a)}[4(b^2+ab+a^2) - 3(3a+b)(b+a) + 6(a+b)b] =$$

$$\frac{(b-a)^2}{6(b-a)}[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)] = \frac{(b-a)}{6}[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]$$

ונקבל את נוסחת סימפסון:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$$

2-12-2001-03

וכעת נחשב על השארית. קימת c_x כך ש-

$$f(x) = p(x) + \frac{f'''(c_x)(x-a)(x-b)(x-\frac{a+b}{2})}{3!}$$

נבצע אינטגרציה של w(x)

$$I = \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)(x-\frac{a+b}{2})}{6} dx$$

נבצע חלוף משתנים t=x-(a+b)/2 ונקבל:

$$I = \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \frac{t(t-\frac{b-a}{2})(t+\frac{b-a}{2})}{6} dt$$

ולכן נסמן c=(b-a)/2 ונקבל

$$0 = I = \int_{-c}^{c} \frac{t^3 - c^2 t}{6} dt \neq \frac{2}{6} \int_{0}^{c} (t^3 - c^2 t) dt$$

2-12-2001-02-01

כיון שהאינטגרנד היא פונקציה אי זוגית.

ולכן דרך ההוכחה שעבדה עבור שיטת הטרפז לא עובדת.

ההוכחה הנכונה מתבססת על נוסחאות 7.21, 7.22, 2.12

ועל הסימטריה של ההפרש המחולק, המופיעים בספר

של Conte and de Boore. אנו נעתיק את החלק החסר של

ההוכחה.

לפי נוסחאות אלו, אם $\int w(x)dx=0$ בקטע [a,b], אז במשפט

השארית של לגרנז אפשר לכתב

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x) w_1(x)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+2)}(d_x) w_2(x)}{(n+2)!}$$

כאשר $w_2(x)$ מתבססת על נקודה כלשהי נוספת בקטע.

מותר לנקודה הנוספת להיות זהה לנקודה שכבר הופיעה.

במקרה שלנו בתחילה p היתה הפרבולה המבוססת על

הנקודות a,b,(a+b)/2. כיון שהאינטגרל של w_1 יצא 0 ,

הרי שמותר ליצור את $w_2(x)=(x-a)(x-b)(x-(a+b)/2)(x-(a+b)/2)$.

יוצא כי פולינום האינטרפולציה זהה למקודם ומקבלים:

$$f(x)-p(x)=\frac{f''''(d_x)w_2(x)}{4!}$$

נניח כי f'''' רציפה בקטע ולכן חסומה בין שני חסמים m ו- M.

נשים לב כי w_2 שלילית בקטע ולכן:

$$\frac{Mw_2(x)}{4!}\le\frac{f''''(d_x)w_2(x)}{4!}\le\frac{mw_2(x)}{4!}$$

הבטוי האמצעי שוה ל- f(x)-p(x), ונותר לחשב את האינטגרל

של w_2. נבצע את אותו שנוי משתנה כמקודם, t=x-((a+b)/2),

נסמן $c=((b-a)/2)$, ולכן:

$$I = \int_a^b w_2(x)dx = \int_{-c}^{c} t^2(t-c)(t+c)dt =$$

$$= 2\int_0^c t^2(t-c)(t+c)dt = = 2\left(\frac{t^5}{5} - \frac{c^2 t^3}{3}\right)\Big|_0^c = \frac{-4c^5}{15}$$

נציב בנוסחה ונקבל:

$$\frac{m((b-a)/2)^5}{90} \le \int_a^b (f(x)-p(x))dx \le \frac{M((b-a)/2)^5}{90}$$

נביט על

$$\frac{90\int_a^b (f(x)-p(x))dx}{((b-a)/2)^5}$$

בטוי זה חסום בין m ו- M, ולכן יש c עבורו מתקים

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{(b-a)}{6}(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)) = \frac{f''''(c)((b-a/2))^5}{90}$$

כעת נחלק את הקטע [a,b] ל- n קטעים שוים באורך h=(b-a)/n.

על כל אחד נפעיל את הנוסחה הקודמת ונקבל:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6}((f(a)+4f(a+\frac{h}{2})+f(a+h))+$$

$$(f(a+h)+4f(a+\frac{3h}{2})+f(a+2h))+\cdots+$$

$$(f(a+(n-1)h)+4f(a+\frac{(2n-1)h}{2})+f(b))$$

נסכם ונקבל את נוסחת סימפסון

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6}(f(a) + 4f(a+\frac{h}{2}) +$$
$$2f(a+h) + 4f(a+\frac{3h}{2}) + 2f(a+2h) +$$
$$\cdots + 2f(a+(n-1)h) + 4f(a+\frac{(2n-1)h}{2}) + f(b))$$

ונחשב את השגיאה:

$$\int_a^b (f(x))dx - S(f,a,b,n) = \frac{(h/2)^5}{90}\sum_{i=1}^{n} f''''(c_i)$$

נכתב $(h/2)^5=((h/2)^4\ (b-a))/2n$, ונציב זאת בנוסחת השגיאה. נזכר
9-12-2001-03
כי ממוצע של ערכים חסומים בין m ו- M גם הוא חסום בין אותם

חסמים, ולכן לפי רציפות f'''', קימת נקודה c, כך שמתקים

כי הממוצע שוה ל f''''(c), ולכן:

$$\int_a^b (f(x))dx - S(f,a,b,n) = \frac{(h/2)^4 (b-a) f''''(c)}{180}$$

וזוהי הערכת השגיאה בנוסחת סימפסון.

דוגמה

חשב את $\int exp(x^2)dx$ בקטע [0,1] על ידי שיטת סימפסון בחלוקה

ל א. קטע אחד. ב. שני קטעים. בכל מקרה הערך את השגיאה.

תשובה

I. בקטע אחד מתקיים

$$\int_0^1 e^{x^2}dx \approx \frac{1-0}{6}(f(0)+4f(\frac{1}{2})+f(1))$$

$$=\frac{1}{6}(1+4\cdot 1.2840254+2.7182818)=$$

$$1.475730583$$

כדי להעריך את השגיאה יש לחסום את f''''. כפי שראינו

מתקיים כי $f'''=(12x+8x^3)f$, ולכן $f''''=(12+48x^2+16x^4)f$, ולכן

10-12-2001-01

$f'''''=(120x+160x^3+32x^5)f$. כיון ש- f''''' חיובית, הרי

ש- f'''' עולה, ולכן חסומה על ידי ערכיה בקצוות, כלומר

מתקיים $f''''(0)=12<f''''<f''''(1)=76e$.

כמו כן נתון כי $h=b-a=1$, ולכן נקבל

$$0.0041667=\frac{((1-0)/2)^4(1-0)\cdot 12}{180}$$

$$\le\int_0^1 e^{(x^2)}dx-1.475730583\le\frac{((1-0)/2)^4(1-0)76e}{180}=0.071732437$$

נשים לב כי איכות הקרוב בשיטת סימפסון עבור n=1, טובה מאיכות הקרוב על ידי שיטת הטרפז עבור n=2.

II. נחזור על החשבונות עבור n=2.

$$\int_0^1 e^{x^2}dx\approx\frac{\frac{1}{2}-0}{6}(f(0)+4f(\frac{1}{4})+2f(\frac{1}{2})+4f(\frac{3}{4})+f(1))$$
$$=\frac{1}{12}(1+4\cdot 1.064494459+2\cdot 1.284025417+$$
$$4\cdot 1.755054657+2.7182818)=1.463710758$$

וכעת על הערכת השגיאה כאשר h=1/2, ונקבל:

$$0.0002604=\frac{((\frac{1}{2}-0)/2)^4(1-0)\cdot 12}{180}$$

$$\le\int_0^1 e^{(x^2)}dx-1.463710758\le\frac{((\frac{1}{2}-0)/2)^4(1-0)76e}{180}=0.004483277$$

תרגיל בית להגשה בכתב עוד שבוע

חזור על הדוגמה הקודמת עם n=4.

דוגמה

נתונה הבעיה של חשוב $\int e^{x^2}dx$, על הקטע [0,1]. נניח כי מחלקים

את הקטע ל- n קטעים שוים ומשתמשים בשיטת סימפסון. מהו

n הראשון שיבטיח כי התוצאה קרובה לאינטגרל האמיתי

עד כדי אלפית.

תשובה

$$\int_0^1 e^{x^2}dx-(\text{שטח}-\text{פרבולות})=\frac{f''''(c)(1-0)}{180}\cdot\frac{((1-0)/2)^4}{n^4}=\frac{f''''(c)}{2880n^4}$$

ראינו כי החסם 76e נכון עבור f'''' בקטע זה, ולכן נקבל:

$$\int_0^1 e^{x^2}dx-(\text{שטח}-\text{פרבולות})\le\frac{76e}{2880n^4}=\frac{19e}{720n^4}\ ?\le ?\ \frac{1}{1000}\Leftrightarrow 18n^4\ge 475e$$

כלומר $n>2$.

נשים לב כי מעבר משיטת הטרפז לשיטת סימפסון הקטין את

n פי 37/3=12.3333, למרות שהשתמשנו רק במספר

נקודות כפול.

תרגיל בית להגשה בכתב עוד שבוע

חזור על הדוגמה הקודמת עבור הפונקציה בעלת הקדומה הלא אלמנטרית $y=(e^x)/x$ בקטע [10,11].

9-12-2001-02